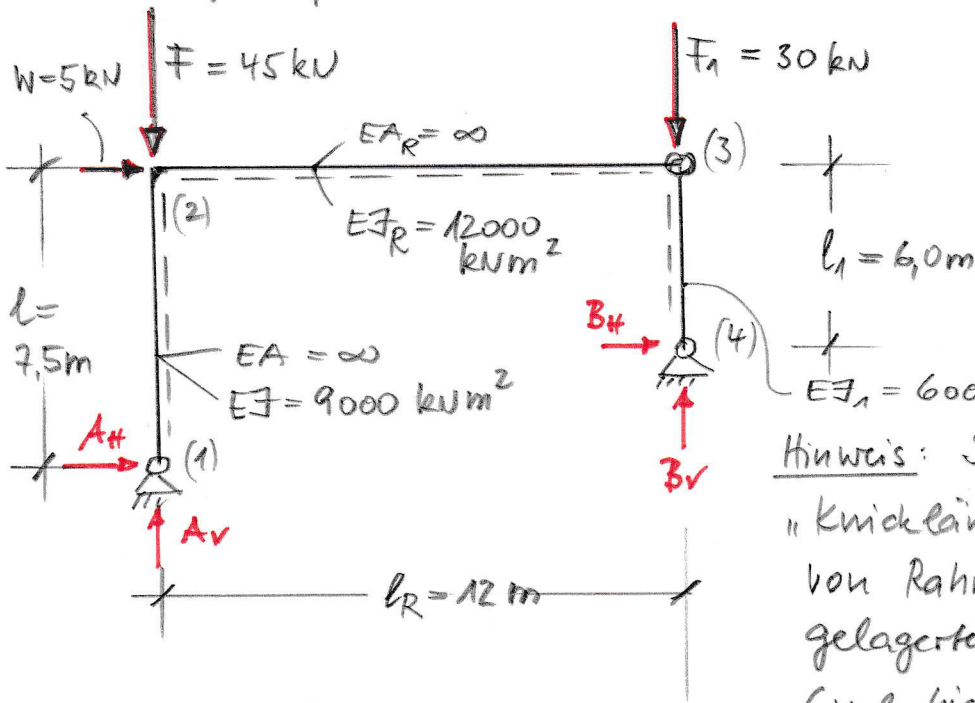


Übungsbeispiel M : Theorie II. Ordnung



a) Zustandsgr. nach Th. II. Ordnung

b) Knicklängen u. Knicklasten

Hinweis: Schneider, Kap. 8
 „Knicklängen u. -lasten von Rahmen mit gelenkig gelagerten Fußpunkten (vgl. hier: Beispiel 3)“

Zustandsgrößen nach Theo. II. Ordnung

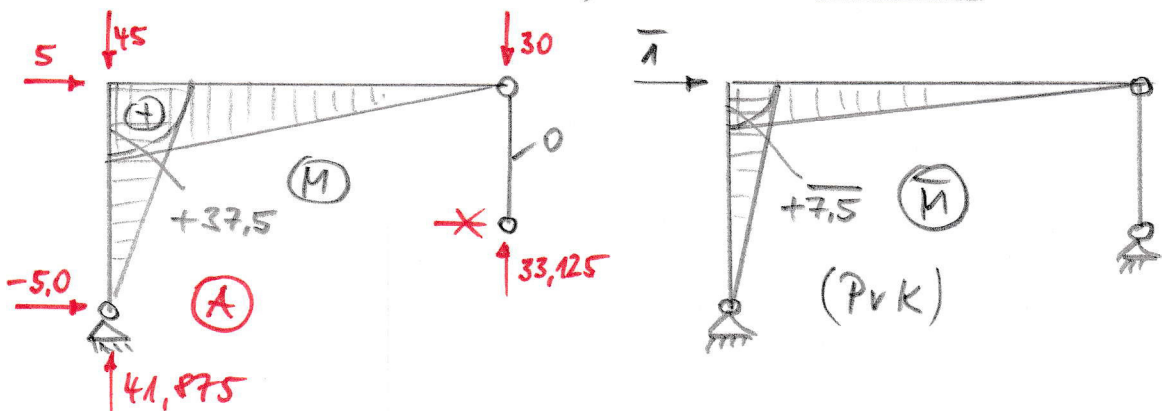
zunächst nach Th. I Ord. (0. Iteration)

$$B_H = 0 ; A_H = -5 \text{ kN}$$

$$B_V = \frac{5 \cdot 7,5 + 30 \cdot 12}{12} = \underline{33,125 \text{ kN}}$$

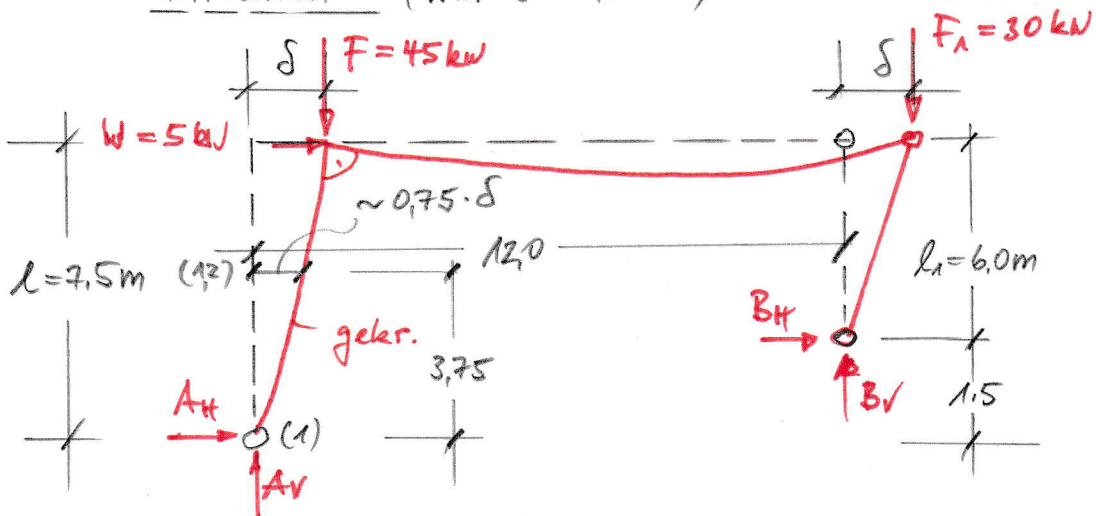
$$A_V = 45 + 30 - 33,125 = \underline{41,875 \text{ kN}}$$

$$M_2 = -A_H \cdot l = -(-5,0) \cdot 7,5 = \underline{+37,5 \text{ kNm}}$$



$$\begin{aligned} \delta = u_2 = u_3 &= \frac{1}{9000} \cdot \frac{1}{3} \cdot 37,5 \cdot 7,5 \cdot 7,5 + \frac{1}{12000} \cdot \frac{1}{3} \cdot 37,5 \cdot 7,5 \cdot 12,0 \\ &= \underline{0,1719 \text{ m}} \quad (\text{Startwert für 1. Iteration: } \delta = 0,2 \text{ m}) \end{aligned}$$

1. Iteration : (mit $\delta = 0,20 \text{ m}$)



$$\sum \overline{M}_1 = 0 : + B_v \cdot 12 - B_H \cdot 1,5 - 30 \cdot 12,2 - 45 \cdot 0,2 - 5 \cdot 7,5 = 0$$

$$\text{mit } B_H = \frac{B_v \cdot \delta}{l_1} = \frac{B_v \cdot 0,2}{6,0}$$

$$\leadsto 12 \cdot B_v - \frac{0,2}{6,0} \cdot 1,5 B_v = 30 \cdot 12,2 + 45 \cdot 0,2 + 5 \cdot 7,5$$

$$B_v = \frac{412,5}{11,95} = \underline{34,52 \text{ kN}}$$

$$\downarrow \sum V = 0 : A_v = 45 + 30 - 34,52 = \underline{40,48 \text{ kN}}$$

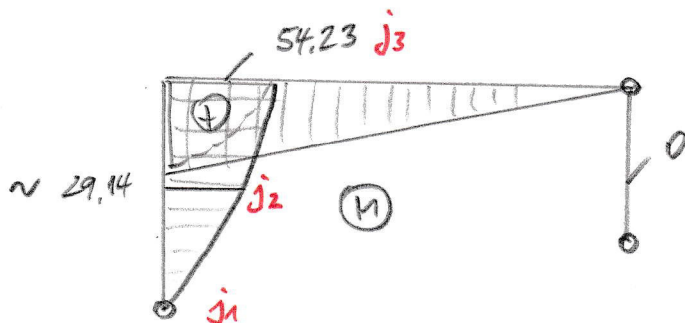
$$\text{Gelenkbed. : } B_H = 34,52 \cdot \frac{0,2}{6,0} = \underline{1,151 \text{ kN}}$$

$$\sum \overline{H} = 0 : A_H = -5 - 1,151 = \underline{-6,151 \text{ kN}}$$

$$M_2 = A_v \cdot \delta - A_H \cdot 7,5$$

$$= 40,48 \cdot 0,2 - (-6,151) \cdot 7,5 = \underline{+54,23 \text{ kNm}}$$

$$M_{1,2} \approx A_v \cdot 0,75 \cdot \delta - A_H \cdot \frac{7,5}{2} = \underline{+29,14 \text{ kNm}}$$



(Startwert für
2. Iteration : $\delta = 0,28 \text{ m}$)

$$\delta = \frac{1}{9000} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7,5 \cdot (2 \cdot 29,14 + 54,23) \cdot 7,5 + \frac{1}{12000} \cdot \frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 54,23 \cdot 12,0 = \underline{0,253 \text{ m}}$$

2. Iteration: (mit $\delta = 0,28\text{ m}$)

$$\overset{!}{\sum M_A} = 0: +B_V \cdot 12 - B_H \cdot 1,5 - 30 \cdot 12,28 - 45 \cdot 0,28 - 5 \cdot 7,5 = 0$$

$$\text{mit } B_H = \frac{B_V \cdot 0,28}{6,0}$$

$$\rightarrow B_V = \frac{418,5}{12 - \frac{0,28}{6,0} \cdot 1,5} = \frac{418,5}{11,93} = \underline{35,08 \text{ kN}}$$

$$B_H = 35,08 \cdot \frac{0,28}{6,0} = \underline{1,64 \text{ kN}}$$

$$A_V = 45 + 30 - 35,08 = \underline{39,92 \text{ kN}}$$

$$A_H = -5 - 1,64 = \underline{-6,64 \text{ kN}}$$

$$M_2 = 39,92 \cdot 0,28 - (-6,64) \cdot 7,5 = \underline{60,98 \text{ kNm}}$$

$$M_{1,2} \approx 39,92 \cdot 0,75 \cdot 0,28 - (-6,64) \cdot \frac{7,5}{2} = \underline{33,28 \text{ kNm}}$$

$$\delta = \frac{1}{9000} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7,5 \cdot (2 \cdot 33,28 + 60,98) \cdot 7,5 + \frac{1}{12000} \cdot \frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 60,98 \cdot 12,0$$

$$= \underline{0,285 \text{ m}} \quad (\text{Startwert für 3. Iteration: } \delta = 0,29 \text{ m})$$

3. Iteration: (mit $\delta = 0,29 \text{ m}$)

$$B_V = \frac{30 \cdot 12,29 + 45 \cdot 0,29 + 5 \cdot 7,5}{12 - \frac{0,29}{6,0} \cdot 1,5} = \underline{35,15 \text{ kN}}$$

$$B_H = 35,15 \cdot \frac{0,29}{6,0} = \underline{1,70 \text{ kN}}$$

$$A_V = 75 - 35,15 = \underline{39,85 \text{ kN}}$$

$$A_H = \underline{-6,70 \text{ kN}}$$

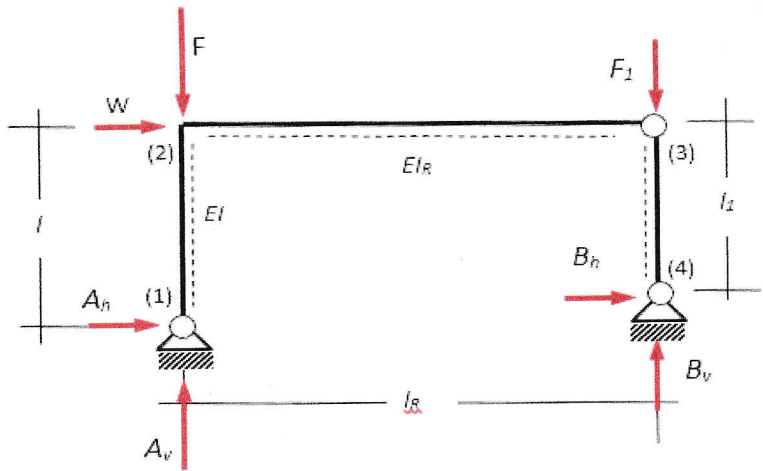
$$M_2 = 39,85 \cdot 0,29 - (-6,70) \cdot 7,5 = \underline{61,81 \text{ kNm}}$$

$$M_{1,2} = 39,85 \cdot 0,75 \cdot 0,29 + 6,70 \cdot \frac{7,5}{2} = \underline{33,79 \text{ kNm}}$$

$$\delta = \frac{7,5^2}{54000} (2 \cdot 33,79 + 61,81) + \frac{1}{36000} \cdot 7,5 \cdot 61,81 \cdot 12 = \underline{0,289 \text{ m}}$$

\rightarrow Iteration beendet!

System: verschieblicher Rahmen



Eingabe:

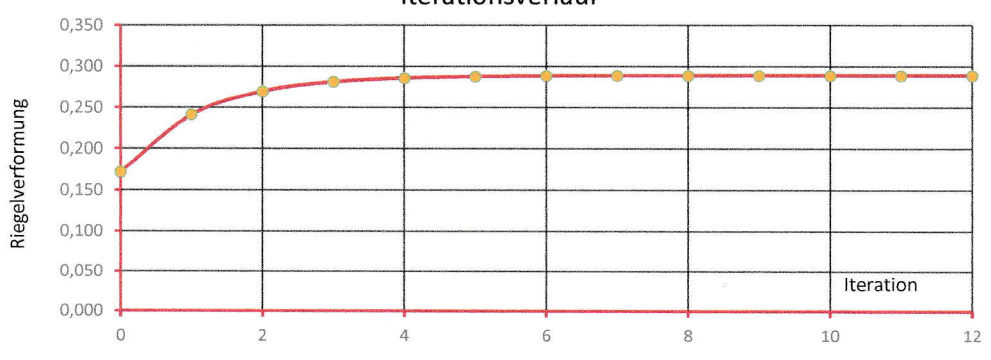
$EI_R =$	12000,0	kNm ²	$F =$	45,0	kN
$EI =$	9000,0	kNm ²	$F_1 =$	30,0	kN
$l_R =$	12,0	m	$W =$	5,0	kN
$l =$	7,5	m	$l_1 =$	6,0	m
			Schiefstell. =	0,00	m (für $u_2 = u_3$)

Ergebnisse:

Kraft- und Verformungsgrößen

	B_v	B_h	A_v	A_h	M_2	M_{1-2}	$u_2 = u_3$	
	kN	kN	kN	kN	kNm	kNm	m	
Iteration								0,0000
0	33,125	0,000	41,875	-5,000	37,500	18,750	0,1719	Th. I. Ord.
1	34,322	0,983	40,678	-5,983	51,865	27,681	0,2414	
2	34,809	1,400	40,191	-6,400	57,702	31,276	0,2695	
3	35,006	1,572	39,994	-6,572	60,073	32,731	0,2809	
4	35,086	1,643	39,914	-6,643	61,035	33,321	0,2856	
5	35,119	1,672	39,881	-6,672	61,426	33,561	0,2875	
6	35,132	1,683	39,868	-6,683	61,585	33,658	0,2882	
7	35,137	1,688	39,863	-6,688	61,650	33,697	0,2885	
8	35,140	1,690	39,860	-6,690	61,676	33,713	0,2887	
9	34,929	1,681	40,071	-6,681	61,671	33,727	0,2887	Th. II. Ord.
10	34,929	1,681	40,071	-6,681	61,672	33,728	0,2887	Th. II. Ord.
11	34,929	1,681	40,071	-6,681	61,673	33,728	0,2887	Th. II. Ord.
12	34,929	1,681	40,071	-6,681	61,673	33,728	0,2887	Th. II. Ord.

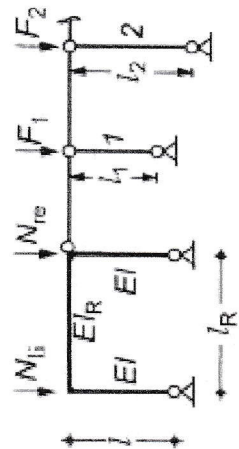
Iterationsverlauf



Rahmen mit gelenkig gelagerten Fußpunkten

Anzahl der Pendelstützen beliebig, $F^* = F_1 \frac{l}{l_1} + F_2 \frac{l}{l_2} + \dots$

ohne Pendelstützen gilt: $F^* = 0$



$$v = \frac{I_R EI}{EI} + 2$$

Verzweigungslastfaktor

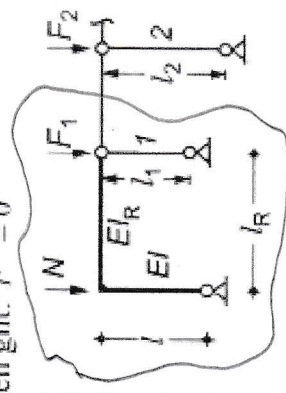
$$v = \frac{I_R EI}{EI} + 1$$

$$\eta_{Kl1} = \frac{6v}{(0,216v^2 + 1)(N_{li} + N_{re}) + F^* l^2} \frac{EI}{l^2}$$

Knicklängen der Rahmenstiele

$$s_{Kl1} = \pi \sqrt{\frac{EI}{\eta_{Kl1} N_{li}}}, \quad s_{Kre} = \pi \sqrt{\frac{EI}{\eta_{Kl1} N_{re}}}$$

Pendelstützen: $s_{K,s} = l_s, s = 1, 2, \dots$



$$F^* = 30 \cdot \frac{7,5}{6,0} = \underline{\underline{37,5 \text{ kN}}}$$

$$v = \frac{1}{\frac{12,0 \cdot 9000}{7,5 \cdot 12000} + 1} = \underline{\underline{0,45}}$$

$$\eta_{Kl} = \frac{3 \cdot 0,45}{(0,216 \cdot 0,45^2 + 1) \cdot 45 + 37,5} \cdot \frac{9000}{7,5^2}$$

$$= \underline{\underline{2,582}}$$

$$N_{Kl} = 2,582 \cdot N = \underline{\underline{2,582 \cdot 45}} = \underline{\underline{116,2 \text{ kN}}}$$

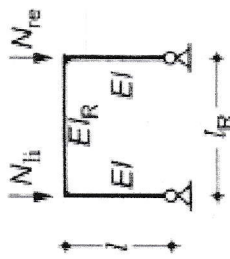
$$s_K = \pi \sqrt{\frac{9000}{116,2}} = \underline{\underline{27,6 \text{ m}}}$$

$$\beta = \frac{s_K}{l} = \frac{27,6}{7,5} = \underline{\underline{3,69}}$$

Verjagensform: horiz. Ausweichen
des einhäufigen Rahmens!

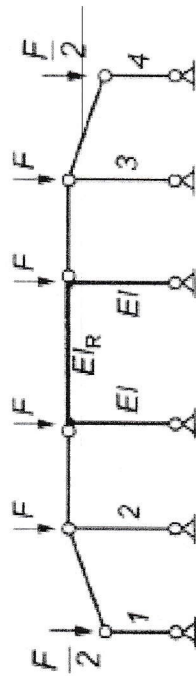
Es gilt für horizontal
verschiedliche Systeme:
 $\beta \geq 1.0$ ✓

1. Beispiel



geg.: $l = 7,5 \text{ m}$, $l_R = 12 \text{ m}$, $EI = 9000 \text{ kNm}^2$
 $EI_R = 12000 \text{ kNm}^2$, $N_{Li} = 75 \text{ kN}$, $N_{Re} = 50 \text{ kN}$
 $F^* = 0$, $\nu = 0,625$, $\eta_{K_i} = 4,427$
 $s_{K,II} = 16,36 \text{ m}$, $s_{K,Re} = 20,03 \text{ m}$

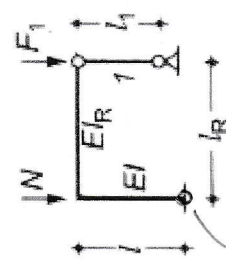
2. Beispiel



geg.: Rahmen wie bei 1. Beispiel
 $l_1 = l_2 = 5 \text{ m}$, $l_2 = l_3 = 7,5 \text{ m}$
 $F = 30 \text{ kN}$
 $F^* = 2 \cdot \left(15 \cdot \frac{7,5}{5} + 30 \right) = 105 \text{ kN}$

$\nu = 0,625$, $\eta_{K_i} = 3,528$, $s_{K,II} = s_{K,Re} = 28,97 \text{ m}$ (Rahmenstiele)

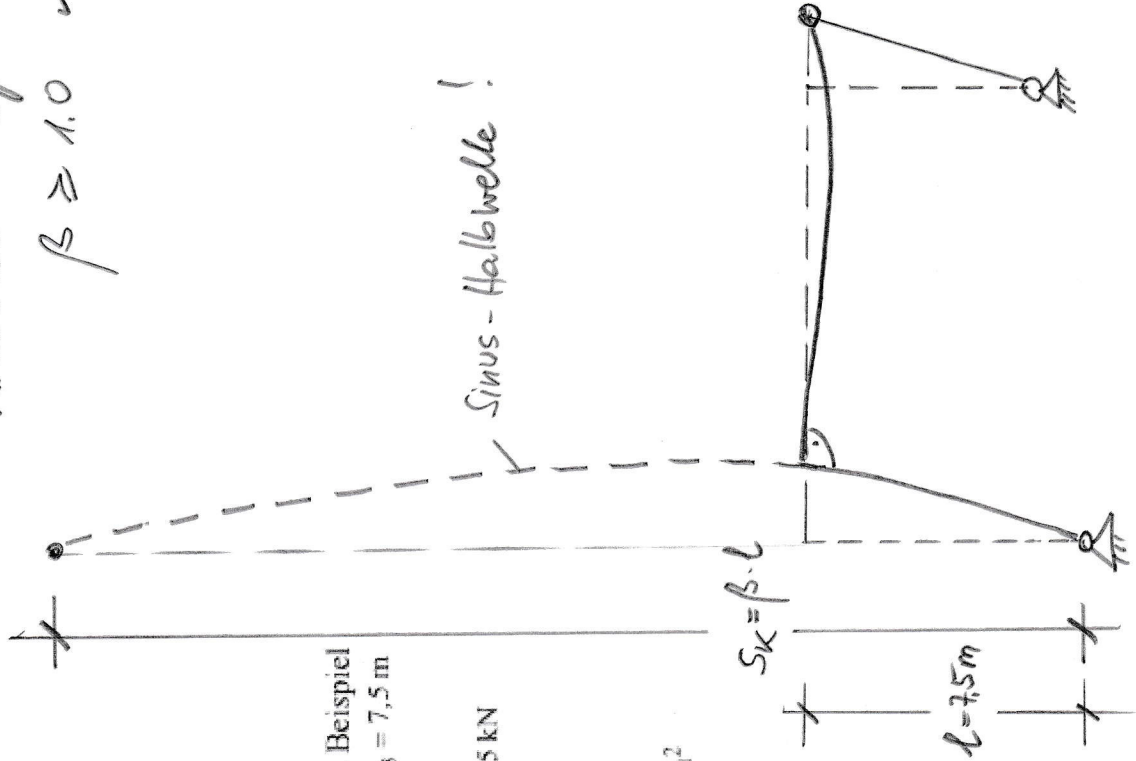
3. Beispiel



geg.: $l = 7,5 \text{ m}$, $l_R = 12 \text{ m}$, $l_1 = 6 \text{ m}$, $EI = 9000 \text{ kNm}^2$
 $EI_R = 12000 \text{ kNm}^2$, $N = 45 \text{ kN}$, $F_1 = 30 \text{ kN}$
 $F^* = 30 \cdot \frac{7,5}{6} = 37,5 \text{ kN}$, $\nu = 0,4545$, $\eta_{K_i} = 2,582$
 $s_K = 27,65 \text{ m}$ (Rahmenstiel)

korrektur!

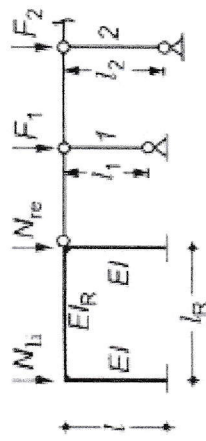
$$s_K = \beta \cdot l = 3,69 \cdot 7,5 = 27,65 \text{ m}$$



Rahmen mit eingespannten Fußpunkten

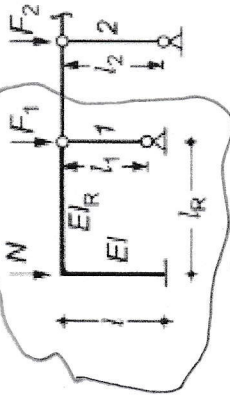
Anzahl der Pendelstützen beliebig, $F^* = F_1 \frac{l}{l_1} + F_2 \frac{l}{l_2} + \dots$

ohne Pendelstützen gilt: $F^* = 0$



$$\rho = 6 \frac{l EI_R}{I_R EI}$$

$$R = \left[1 - \frac{1,05 \rho}{(\rho + 4)^2} \right] 1,216 (N_{Li} + N_{Re}) + F^*$$



$$\rho = 3 \frac{l EI_R}{I_R EI}$$

$$R = \left[1 - \frac{1,05 \rho}{(\rho + 4)^2} \right] 1,216 N + F^*$$

Verzweigungslastfaktor

$$\eta_{K1} = \frac{\rho + 1}{\rho + 4} \frac{EI}{R l^2}$$

$$\eta_{K2} = \frac{\rho + 1}{\rho + 4} \frac{EI}{R l^2}$$

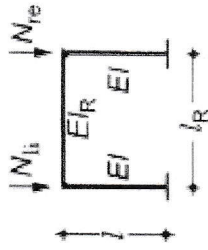
Knicklängen der Rahmenstiele

$$s_{K,1i} = \pi \sqrt{\frac{EI}{\eta_{K1} N_{Li}}}, \quad s_{K,Re} = \pi \sqrt{\frac{EI}{\eta_{K1} N_{Re}}}$$

$$s_K = \pi \sqrt{\frac{EI}{\eta_{K1} N}}$$

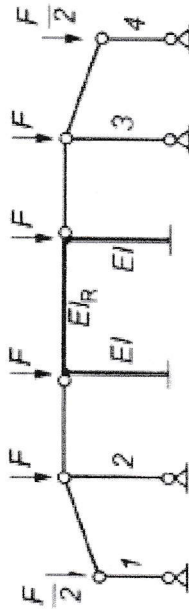
Pendelstützen: $s_{K,s} = l_s, s = 1, 2, \dots$

1. Beispiel



geg.: $l = 7,5 \text{ m}$, $l_R = 12 \text{ m}$, $EI = 9000 \text{ kNm}^2$
 $EI_R = 12000 \text{ kNm}^2$, $N_1 = 300 \text{ kN}$, $N_{re} = 200 \text{ kN}$
 $F^* = 0$, $\rho = 5$, $R = 568,6 \text{ kN}$, $\eta_{KI} = 4,502$
 $s_{K,II} = 8,109 \text{ m}$, $s_{K,re} = 9,932 \text{ m}$

2. Beispiel

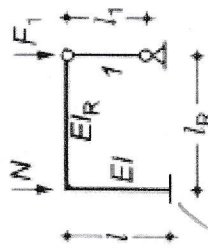


geg.: Rahmen wie beim 1. Beispiel
 $l_1 = l_4 = 5 \text{ m}$, $l_2 = l_3 = 7,5 \text{ m}$
 $F = 120 \text{ kN}$

$$F^* = 2 \cdot \left(60 \cdot \frac{7,5}{5} + 120 \right) = 420 \text{ kN}$$

$\rho = 5$, $R = 692,9 \text{ kN}$, $\eta_{KI} = 3,694$, $s_{K,II} = s_{K,re} = 14,15 \text{ m}$ (Rahmenstiele)

3. Beispiel

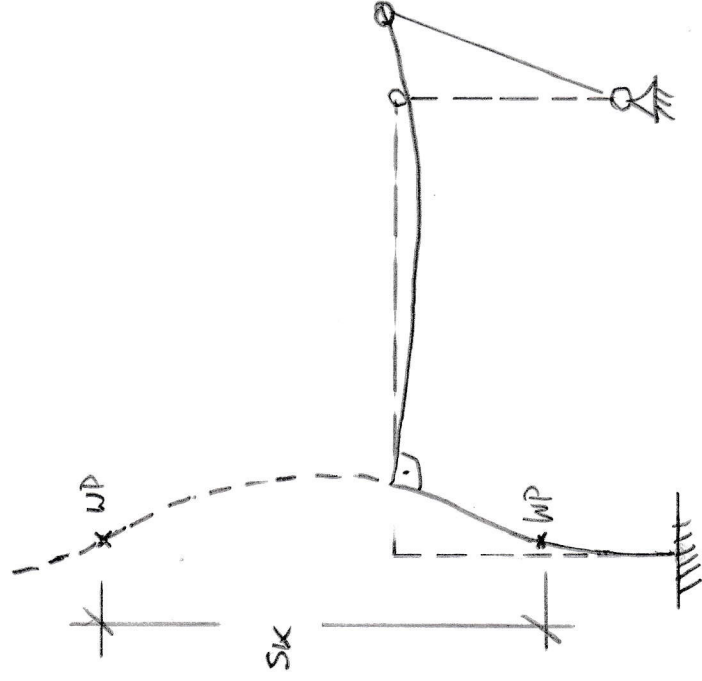


geg.: $l = 7,5 \text{ m}$, $l_R = 12 \text{ m}$, $l_1 = 6 \text{ m}$, $EI = 9000 \text{ kNm}^2$
 $EI_R = 12000 \text{ kNm}^2$, $N = 150 \text{ kN}$, $F_1 = 100 \text{ kN}$
 $F^* = 100 \cdot \frac{7,5}{6} = 125 \text{ kN}$, $\rho = 2,5$, $R = 296,1 \text{ kN}$
 $\eta_{KI} = 3,492$, $s_K = 13,02 \text{ m}$ (Rahmenstiel)

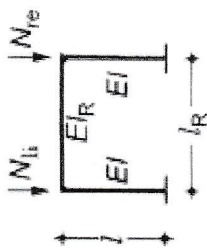
bei Einspannung: $N_{KI} = 3,492 \cdot 150 = \underline{523,8 \text{ kN}}$

$$s_K = \frac{13,02 \text{ m}}{7,5}$$

$$\beta = \frac{13,02}{7,5} = \underline{1,74}$$

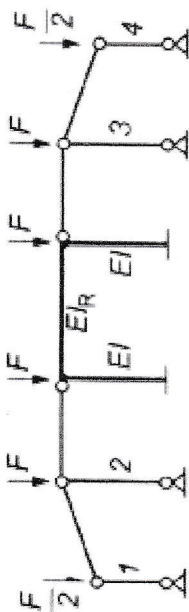


1. Beispiel



geg.: $l = 7,5 \text{ m}$, $l_R = 12 \text{ m}$, $EI = 9000 \text{ kNm}^2$
 $EI_R = 12000 \text{ kNm}^2$, $N_1 = 300 \text{ kN}$, $N_{re} = 200 \text{ kN}$
 $F^* = 0$, $\rho = 5$, $R = 568,6 \text{ kN}$, $\eta_{ki} = 4,502$
 $s_{k,i} = 8,109 \text{ m}$, $s_{k,re} = 9,932 \text{ m}$

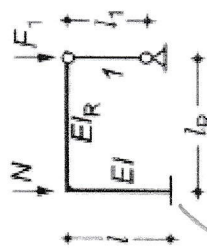
2. Beispiel



geg.: Rahmen wie beim 1. Beispiel
 $l_1 = l_4 = 5 \text{ m}$, $l_2 = l_3 = 7,5 \text{ m}$
 $F = 120 \text{ kN}$
 $F^* = 2 \cdot \left(60 \cdot \frac{7,5}{5} + 120 \right) = 420 \text{ kN}$

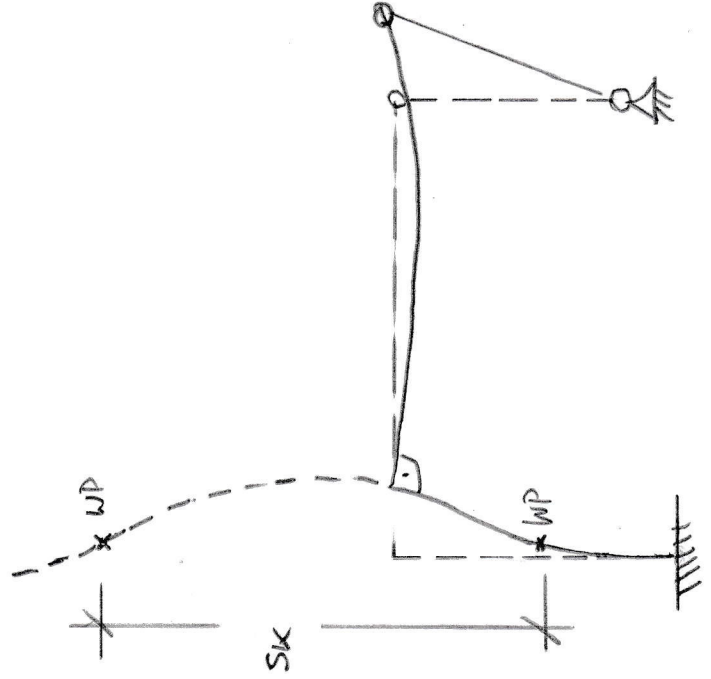
$\rho = 5$, $R = 692,9 \text{ kN}$, $\eta_{ki} = 3,694$, $s_{k,i} = s_{k,re} = 14,15 \text{ m}$ (Rahmenstiele)

3. Beispiel



geg.: $l = 7,5 \text{ m}$, $l_R = 12 \text{ m}$, $l_1 = 6 \text{ m}$, $EI = 9000 \text{ kNm}^2$
 $EI_R = 12000 \text{ kNm}^2$, $N = 150 \text{ kN}$, $F_1 = 100 \text{ kN}$
 $F^* = 100 \cdot \frac{7,5}{6} = 125 \text{ kN}$, $\rho = 2,5$, $R = 296,1 \text{ kN}$
 $\eta_{ki} = 3,492$, $s_k = 13,02 \text{ m}$ (Rahmenstiel)

bei Einspannung: $N_{ki} = 3,492 \cdot 45 = 157,1 \text{ kN}$
 $s_k = \frac{13,02 \text{ m}}{7,5}$
 $\beta = \frac{13,02}{7,5} = 1,74$

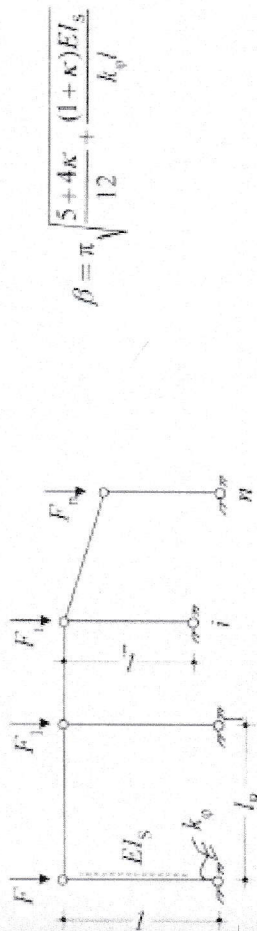


Holschemacher: Entwurfs- und Berechnungstafeln für Bauingenieure; 4. Auflage; Bauwerk

- Knicklängenbeiwerte ausgewählter Systeme:
Für alle nachfolgenden Fälle gilt:

$$\kappa = \frac{l}{F} \sum \frac{F_i}{l_i} \quad (\text{ohne Pendelstützen: } \kappa = 0) = \frac{7,5}{45} \cdot \frac{30}{6,0} = \underline{\underline{0,83}}$$

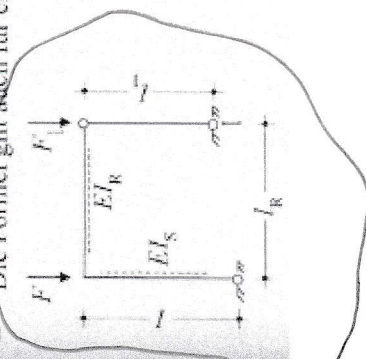
- Drehweiche eingespannte Stabilisierungsstütze ohne/mit angehängten Pendelstützen:



$$\beta = \pi \sqrt{\frac{5 + 4k_a + (1 + \kappa)EI_s}{k_a l}}$$

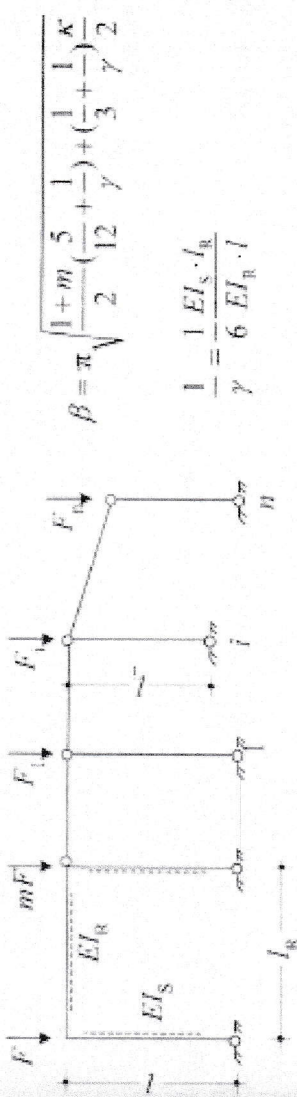
- Die Formel gilt auch für einbürtige Rahmen, wenn k_a durch $\frac{3EI_R}{l_R}$ ersetzt wird:

$$\beta = \pi \sqrt{\frac{5 + 4\kappa + (1 + \kappa)EI_s \cdot l_R}{3EI_R \cdot l}}$$



$$\beta = \pi \cdot \sqrt{\frac{5 + 4 \cdot 0,83}{12} + \frac{(1 + 0,83) \cdot 9000 \cdot 12,0}{3 \cdot 12000 \cdot 7,5}} = \underline{\underline{3,75}}$$

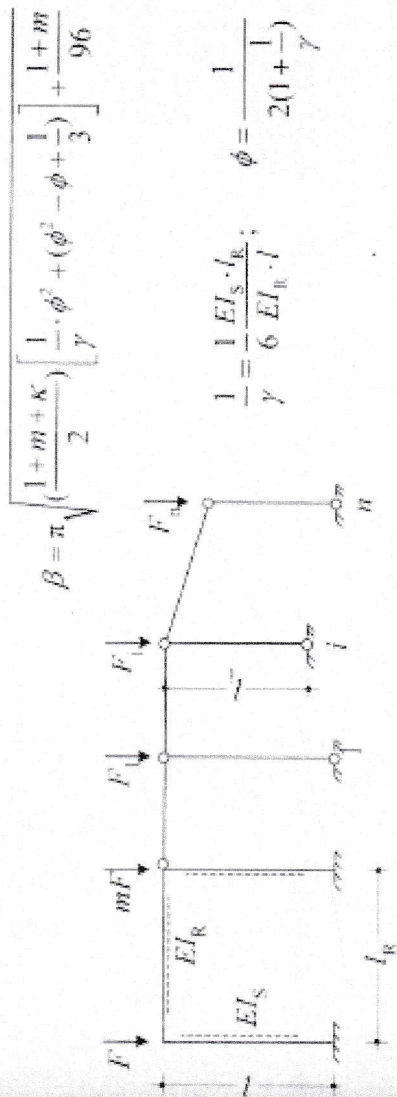
- Zweigelenrahmen ohne/mit angehängten Pendelstützen:



$$\beta = \pi \sqrt{\frac{1 + m}{2 \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{\gamma} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\kappa}{\gamma}}}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{6} \frac{EI_s \cdot l_R}{EI_R \cdot l}$$

- Eingespannter Rahmen ohne/mit angehängten Pendelstützen:



$$\beta = \pi \sqrt{\frac{1 + m + \kappa}{2 \left[\frac{1}{\gamma} \cdot \phi^2 + \left(\phi^2 - \phi + \frac{1}{3} \right) \left[\frac{1 + m}{96} \right] \right]}}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{6} \frac{EI_s \cdot l_R}{EI_R \cdot l}; \quad \phi = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)}$$

(Vergleich mit $\beta = 3,69$ auf Seite 6)