

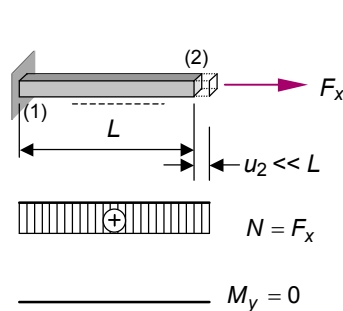
1. Stabilitätsprobleme

1.1 Allgemeine Betrachtungen

Bei allen bisherigen Betrachtungen der vorausgegangenen Kapitel besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den äußeren Einwirkungen und den Verformungen des Tragwerks. Da die Verformungen gegenüber den Bauteil- und Tragwerksabmessungen klein sind, ist ein Verformungseinfluss auf die Schnittgrößen nicht oder nur in einem zu vernachlässigenden Maße vorhanden (Bild 1.1). Im Zuge der statischen Berechnung ist es daher völlig ausreichend, die Schnittgrößen am **unverformten System**, also nach **Theorie I. Ordnung** zu ermitteln.

Zwischen den äußeren Einwirkungen einerseits und den Schnittgrößen, den Spannungen und – sofern ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorliegt – den Verzerrungen sowie Verformungen andererseits besteht in diesem Fall noch ein proportionaler Zusammenhang. Wenn die Tragwerksantwort proportional zur Belastung ist, gilt das **Superpositionsprinzip**. Die Einwirkungen können in beliebig viele Lastfälle aufgeteilt werden, die separat berechnet werden dürfen. Die Gesamtlösung ergibt sich aus der additiven Überlagerung, der Superposition der einzelnen Teillösungen.

Schnittgrößen ohne Verformungseinfluss



Schnittgrößen mit vernachlässigbarem Verformungseinfluss

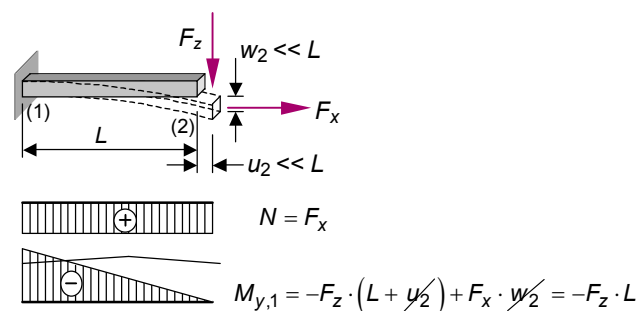


Bild 1.1: Einfluss der Verformungen auf Schnittgrößen

Der eindeutige Zusammenhang kann verloren gehen, wenn Normalkräfte – insbesondere hohe **Druckkräfte** – im Tragwerk wirken. Sehr deutlich kann dieser Umstand an einer Kragstütze mit exzentrisch wirkender Druckkraft am Kopfende demonstriert werden (Bild 1.2).

Durch die zunächst konstante Biegebeanspruchung über die gesamte Stablänge verkrümmt sich die Kragstütze und weicht seitlich aus der bislang lotrechten Achse aus. Die einwirkende Druckkraft am Kopfende wandert mit und erzeugt aufgrund der zunehmenden **Exzentrizität** bezüglich des Fußpunktes eine zusätzliche Biegebeanspruchung. Durch weiter zunehmende Verkrümmung des Stabes und größer werdende Kopfauslenkung wird ein Prozess in Gang gesetzt, der nur durch eine **iterative Berechnung** zutreffend erfasst werden kann.

Bei welcher Auslenkung das System eine **stabile Gleichgewichtslage** findet, hängt von der Größe der Druckkraft, der Biegesteifigkeit des Stabquerschnitts ($E \cdot I =$ Elastizitätsmodul $E \cdot$ Trägheitsmoment I) und der Stablänge L ab. Unabhängig von der Größe der Kopfauslenkung bleibt festzustellen, dass die Druckkraft die Stabverformungen maßgebend vorantreibt und sich die Schnittgrößen am verformten System deutlich von denen am unverformten System unterscheiden.

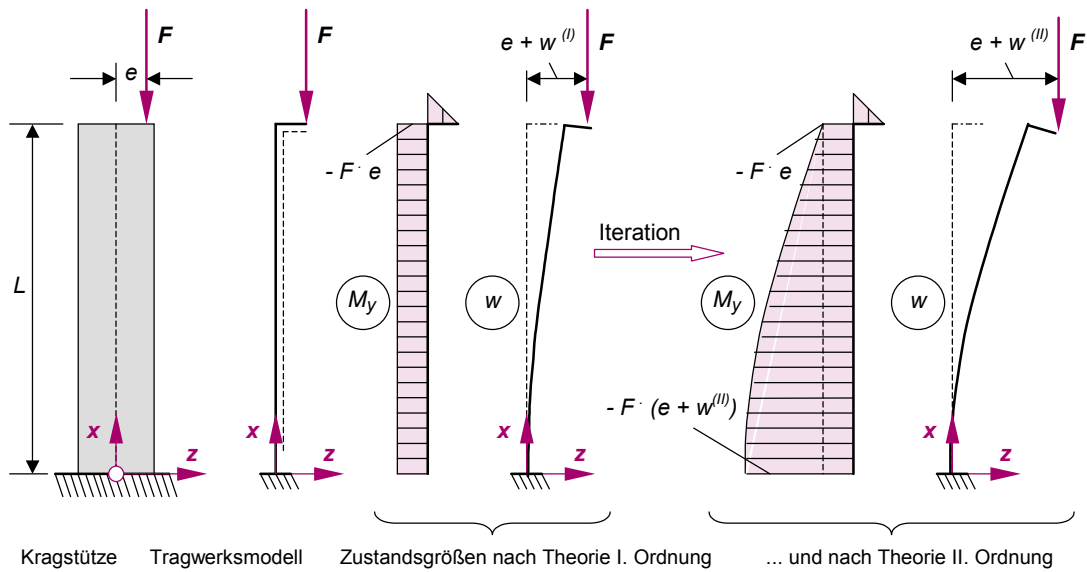


Bild 1.2: Einfluss der Verformungen auf Schnittgrößen bei Druckbeanspruchungen

Die Ermittlung der Schnittgrößen bei Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System wird als Berechnung nach **Theorie II. Ordnung** bezeichnet. Die Proportionalität zwischen den Lasteinwirkungen, den Schnitt- und Verformungsgrößen geht verloren. Das Tragverhalten wird in einem solchen Fall als geometrisch nichtlinear bezeichnet. Das Tragwerk selbst muss dann mit besonderen Methoden berechnet und bemessen werden. Das Superpositionsprinzip gilt nicht mehr. Das typische Tragverhalten der in Bild 1.2 dargestellten Kragstütze wird durch ein Last-Verformungsdiagramm deutlich.

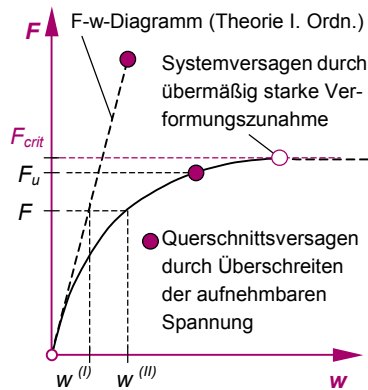


Bild 1.3: Nichtlineares Last-Verformungsdiagramm

Bild 1.3 stellt qualitativ den Zusammenhang zwischen der einwirkenden Druckkraft und der seitlichen Auslenkung am Stützenkopf dar. Bei einem bestimmten Lastniveau $F = F_u$ ist das Zusatzmoment aus Druckkraft multipliziert mit der Kopfauslenkung so groß, dass die Stütze am eingespannten Fußpunkt durch Überschreiten der aufnehmbaren Spannungen infolge des Biegemoments und der Normalkraft versagt (**Werkstoffversagen**). Bei einer Untersuchung allein nach Theorie I. Ordnung würde dieses Tragwerk hinsichtlich seiner aufnehmbaren Last klar überschätzt werden. Auch eine Stütze aus einem ideal-elastischen Werkstoff mit einer Fließgrenze $f_y \rightarrow \infty$ wird in diesem Fall bei einem niedrigen Lastniveau versagen. Bei einem Lastniveau $F = F_{crit}$ erreicht die Auslenkung des Stützenkopfes ein solches Ausmaß, dass die Stütze ihre im Bauwerk zuge dachte Aufgabe nicht mehr übernehmen kann (**Systemversagen**).

Der Tragwiderstand des Systems reicht nicht mehr aus, um der rapiden Zunahme der Biegebeanspruchung durch eine zunehmende Druckkraft und anwachsenden Hebelarm Herr zu werden.

Der Einfluss der Druckbeanspruchung auf das Verformungsverhalten soll am nachfolgenden Beispiel studiert werden. Um den Rechenaufwand gering zu halten, wird ein starrer Stab mit einer elastischen Drehfederlagerung am unteren Stabende untersucht. Die Drehfeder soll hier mechanisch vereinfachend die rückstellende Wirkung einer elastischen (biegesteifen) und fest eingespannten Kragstütze (siehe Bild 1.2) darstellen.

Hinweis: Drehfedern werden u.a. oft als Modellierungshilfe bei statischen Berechnungen eingesetzt, um damit die Nachgiebigkeit der Last aufnehmenden Konstruktion gegenüber einer Verdrehung zu modellieren (Stichwort: elastische Einspannung).

Beispiel 1.1: Leicht geneigte starre Kragstütze unter Druckbeanspruchung

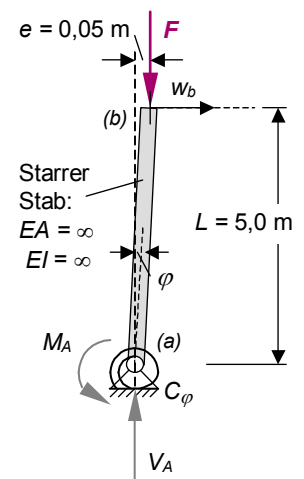
Gegeben:

Dargestellt ist nebenstehend eine starre, leicht geneigte Kragstütze, die am Fußende von einer Drehfeder elastisch gehalten ist. Die Federsteifigkeit beträgt $C_\varphi = 3000 \text{ kNm/rad}$; d.h. die Drehfeder wird bei einer Verdrehung um $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi = 57,3^\circ$ ein Einspannmoment von 3000 kNm erzeugen.

Im unbelasteten Zustand beträgt die Vorverformung $e = 5 \text{ cm}$. Es soll untersucht werden, wie das System auf eine zunehmende Druckkraft F unter Beachtung der Horizontalverschiebung am Kopfende w_b reagiert. Dazu soll ein Last-Verformungsdiagramm für den Lastbereich $0 \leq F \leq 600 \text{ kN}$ erstellt werden

Lösungsweg 1:

Es wird für jede Laststufe die zugehörige Kopfauslenkung w_b berechnet. Dieses erfolgt iterativ, bis sich ein Gleichgewicht zwischen dem Einspannmoment $M_A = C_\varphi \cdot \varphi = C_\varphi \cdot w_b / L$ und dem Moment aus einwirkender Last F multipliziert mit dem Hebelarm $e + w_b$ einstellt. So ergibt sich am Beispiel $F = 400 \text{ kN}$ folgende Iteration:



w_b [m]	$\varphi = w_b / L$	M_A [kNm]	$e + w_b$	$F (e + w_b)$	Gleichgew.
0,00	0,000	0,0	0,05	20,0	
0,02	0,004	12,0	0,07	28,0	
0,04	0,008	24,0	0,09	36,0	
0,06	0,012	36,0	0,11	44,0	
0,08	0,016	48,0	0,13	52,0	
0,10	0,020	60,0	0,15	60,0	✓

Unter der Last von $F = 400 \text{ kN}$ kommt das System bei einer horizontalen Verschiebung von $w_b = 0,10 \text{ m}$ zur Ruhe; es stellt sich ein Momentengleichgewicht ein.

Lösungsweg 2:

Bei sehr einfachen Systemen kann – wie hier gezeigt – eine direkte Last-Verformungsbeziehung entwickelt werden, sodass auf eine Iteration verzichtet werden kann.

Die Drehfederkraft ist identisch mit der Auflagergröße M_A und direkt abhängig von der Verformungsgröße w_b . Es gilt:

$$M_A = C_\varphi \cdot \varphi = C_\varphi \cdot w_b / L \quad (\text{bei kleinen Winkeln gilt: } \tan \varphi = \varphi)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum M_{(a)} = 0$ ergibt sich am verformten System – also nach Theorie II. Ordnung – folgender Zusammenhang:

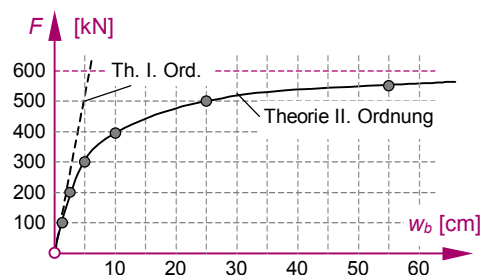
$$F \cdot (e + w_b) - M_A = 0 \quad \rightarrow \quad F \cdot (e + w_b) - C_\varphi \cdot w_b / L = 0$$

Die Auflösung nach w_b liefert eine Bestimmungsgleichung für die Horizontalverschiebung in Abhängigkeit von der einwirkenden Last F :

$$w_b = \frac{F \cdot L \cdot e}{C_\varphi - F \cdot L}$$

Die tabellarische und grafische Auswertung dieser Umformung führt zu folgendem Ergebnis:

F [kN]	w_b [cm]
0	0,00
50	0,45
100	1,00
200	2,50
300	5,00
400	10,00
500	25,00
550	55,00
600	∞



Bei einer Last von $F = F_{crit} = 600$ kN kann das Tragsystem keine stabile Gleichgewichtslage mehr einnehmen; es kommt zum Systemversagen durch übergroße Verformungen. Bei einer Berechnung nach Theorie I. Ordnung würden sich bei $F = 600$ kN völlig unrealistische Werte ergeben; nämlich:

$$\begin{aligned} F \cdot e - M_A = 0 &\quad \rightarrow \quad M_A = 600 \cdot 0,05 = \underline{30,0 \text{ kNm}} \\ &\quad \rightarrow \quad w_b^{(I)} = \varphi \cdot L = \frac{M_A}{C_\varphi} \cdot L = \frac{30}{3000} \cdot 5 = \underline{0,05 \text{ m}} \end{aligned}$$

Stellvertretend für viele gedrückte Stäbe wird mit diesem Beispiel deutlich, dass die Schnittgrößenberechnung nach Theorie I. Ordnung keine zuverlässigen Ergebnisse liefert; insbesondere dann, wenn Druckkräfte vorherrschen, die ungünstige Verformungen mit entsprechendem Einfluss auf die Schnittgrößen hervorrufen und damit die Stabilität des Tragsystems gefährden (siehe Bild 1.4).

Die Theorie II. Ordnung beschränkt sich in ihrer Anwendung natürlich nicht allein auf druckbeanspruchte Bauteile oder Tragwerke. Vergleicht man die Ergebnisse dieser Theorie mit denen der Theorie I. Ordnung, so ist immer eine stabilisierende oder entlastende Wirkung durch Zugkräfte zu spüren.

Mithilfe der Theorie II. Ordnung (Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System) sind praktische Stabilitätsprobleme lösbar. Es können genaue Werte für die kritische Belastung F_{crit} berechnet werden. Dabei werden vereinfachend alle Verformungsgrößen weiterhin als klein im Vergleich zu den Systemabmessungen betrachtet. So wurde in Beispiel 1 weiterhin angenommen, dass die Stützenlänge in der Seitenprojektion konstant 5,0 m beträgt, und zwar unabhängig von der Größe der Stützenschiefstellung (vgl. $\tan \varphi = \varphi$). Dieser Ansatz ist baupraktisch vertretbar und lässt bestimmte Linearisierungen bei der mathematischen Behandlung der mechanischen Zusammenhänge zu.

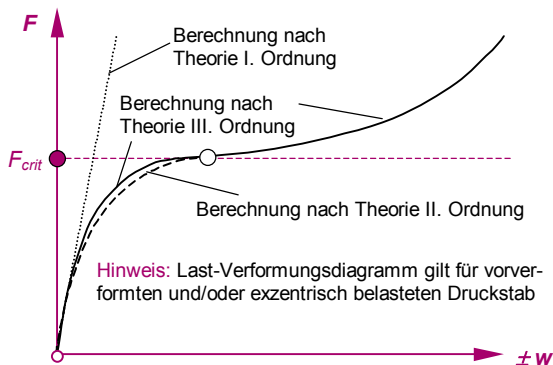


Bild 1.4: Berechnungsmethoden im Vergleich

Gibt man die Vereinfachung $\tan \varphi = \varphi$ auf und berücksichtigt den Einfluss der Verformungsgeometrie noch genauer (Stützenkopf folgt einer Kreisbahn um das untere Auflager), so führt man eine Berechnung nach Theorie III. Ordnung durch. Sie ist sehr aufwändig und liefert – ebenso wie die Berechnung nach Theorie II. Ordnung – genaue Werte für die kritische Belastung. Allerdings lässt sich damit das Last-Verformungsverhalten auch oberhalb der kritischen Last untersuchen (Bild 1.4). Eine Berechnung nach Theorie III. Ordnung ist für praktische Stabilitätsuntersuchungen nicht erforderlich.

Hinweis: Beim stabilitätsgefährdeten Tragwerk ist im Rahmen der Tragwerksplanung immer ein so genannter **Nachweis der Tragsicherheit** mit Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung durchzuführen. Man benutzt in diesem Zusammenhang oft auch den Begriff „**Stabilitätsnachweis**“.

Bei den bisherigen Betrachtungen dieses Kapitels ist ein **theoretischer Grenzfall** bewusst außer Acht gelassen worden. Die Berechnungsmethoden nach Theorie I. und II. Ordnung geben keine Antwort darauf, wie beispielsweise die Kragstütze nach Bild 1.2 auf eine zunehmende, jedoch **zentrisch** wirkende Druckkraft mit $e = 0$ bei ideal lotrecht Stabachse reagiert. Wegen der fehlenden Außermittigkeit gibt es keine Biegemomente mehr, die zu einer Verkrümmung des Stabes und zu einer Auslenkung des Stützenkopfes führen würden. Aus Erfahrung ist jedoch bekannt, dass derartige Stäbe bei der Einwirkung einer hohen Druckkraft unvermittelt aus der gestreckten Lage in eine **ausgelenkte Lage** übergehen können (Bild 1.5). Dieser Vorgang wird als **Knicken**; die zugehörige Last als **Knicklast F_{ki}** bezeichnet.

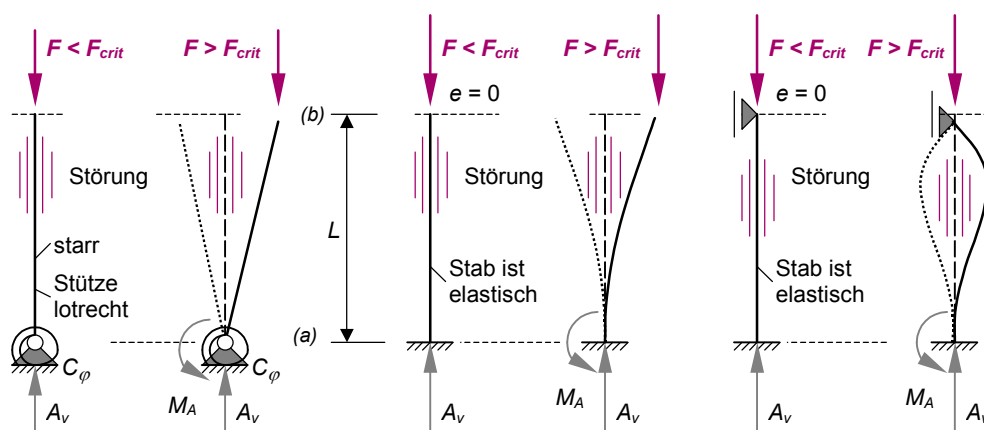
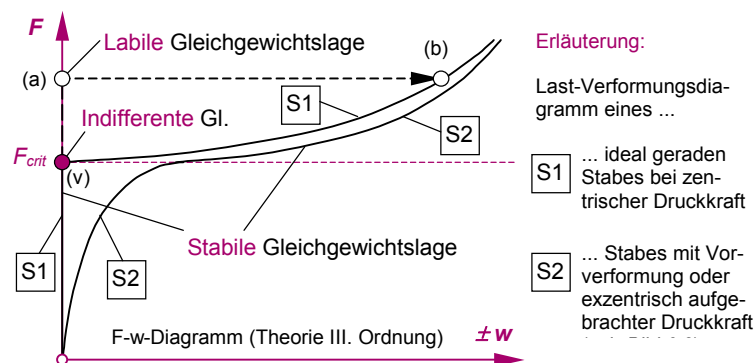


Bild 1.5: Beispiele für knickgefährdete Systeme

In den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels wird sich herausstellen, dass es sich bei der Knicklast um die kritische Last F_{crit} handelt. Auslöser des Ausknickens ist eine kleine **Lagestörung**, die durch Aufbringen einer minimalen Störlast, durch eine **Imperfektion** im Materialgefüge oder eine Ungenauigkeit in der Tragwerksgeometrie verursacht wird. Das Aufbringen einer kleinen Lagestörung ist ein hilfreiches Verfahren, um die Stabilität eines Systems zu beurteilen. Die Stabilität einer Gleichgewichtslage ist gegeben, wenn ein System nach einer Störung den ursprünglichen Gleichgewichtszustand wieder einnimmt. Die Untersuchung derartiger Systeme – speziell die Ermittlung der kritischen Lasten – ist Gegenstand der **Stabilitätstheorie**.

In Bild 1.6 wird das typische Last-Verformungsverhalten knickgefährdeter Systeme dargestellt. Bei einer Belastung unterhalb von F_{crit} bleibt das System in der gestreckten Lage. Nach einer eventuellen Störung schwingt es wieder in die ursprüngliche lotrechte Lage zurück. Das System kommt zur Ruhe und nimmt eine **stabile Gleichgewichtslage** ein. Im Last-Verformungsdiagramm lässt sich dieses Verhalten durch einen lotrechten Kurvenabschnitt darstellen (siehe Bild 1.6, Linie „S1“ bis F_{crit}).

Erreicht die Last $F = F_{crit}$, so stellt sich ein **indifferentes Gleichgewicht** ein; d.h., der Stab verbleibt in der lotrechten Lage oder wird aufgrund einer kleinen Lagestörung in einen benachbarten Verformungszustand gebracht. Dieser Zustand ändert sich auch nach Abklingen der Störung nicht (vgl. Bild 1.6, am so genannten Verzweigungspunkt (v) der Linie „S1“).

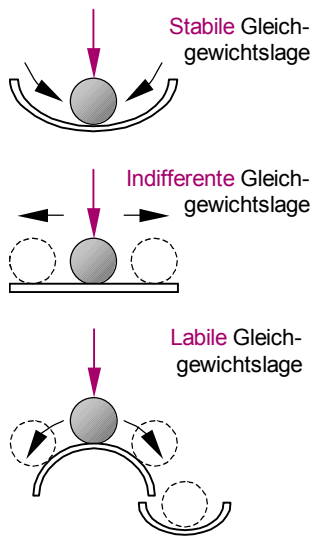


Ein gedrückter Stab kann bei einer Last $F \geq F_{crit}$ auch in eine entgegengesetzte Richtung ausweichen. In Bild 1.6 ist die Abszisse deshalb mit $\pm w$ beschriftet worden. Der mit (v) bezeichnete Punkt wird als **Verzweigungspunkt** bezeichnet, da das System bei Laststeigerung über F_{crit} hinaus nach beiden Richtungen ausweichen kann.

Bild 1.6: Last-Verformungsdiagramm

Steigt die Belastung um ein geringes Maß über F_{crit} hinaus an, so kann der Stab noch in der gestreckten Lage verharren (Bild 1.6, Pkt. a). Das System befindet sich jedoch nun in einer **labilen Gleichgewichtslage**; bereits eine kleine Störung führt zu einem schlagartigen Ausweichen. Das System wird erst nach einer übermäßig großen und baupraktisch nicht mehr zu vertretenden Auslenkung einen anderen stabilen Gleichgewichtszustand einnehmen (Bild 1.6, Pkt. b) oder – auf dem Weg dorthin – vorzeitig durch Bruch versagen.

Die unterschiedlichen Arten des Gleichgewichts lassen sich anschaulich mit Bild 1.7 erläutern. Herrscht eine stabile Gleichgewichtslage, so entsteht bei einer Störung eine Kraftkomponente, die das System in die Ausgangslage zurückbewegt. Folglich ist jede Nachbarlage keine Gleichgewichtslage. Beim indifferenten Gleichgewicht gibt es die rückstellende Kraft nicht mehr. Die Nachbarlage ist ebenfalls eine Gleichgewichtslage, und das System verbleibt in der gestörten Lage. Bei einer Störung im labilen Gleichgewichtszustand entsteht eine Kraftkomponente, die das System weiter von der Ausgangslage entfernt; d.h., die Nachbarlage kann keine Gleichgewichtslage sein. Das System findet erst nach großer Verformung einen neuen stabilen Gleichgewichtszustand und kommt hier zur Ruhe.



Bei gedrückten Stäben mit exzentrisch eingeleiteter Druckkraft oder Vorverformungen (Schiefstellungen, Vorkrümmungen), die bereits in der gestreckten Lage Biegemomente aus $M = N \cdot e$ aufweisen (Bild 1.2), können sich keine instabilen, d.h. indifferenten oder labilen Gleichgewichtslagen einstellen. Bei zunehmender Druckbeanspruchung folgen diese Systeme einer Last-Verformungskurve, wie sie charakteristisch in Bild 1.6 mit dem Kurvenverlauf „S2“ dargestellt ist. Der Vergleich mit dem Kurvenverlauf „S1“ macht deutlich, dass „S1“ eine obere Grenze für das Last-Verformungsverhalten von stabilitätsgefährdeten Systemen darstellt. Beim Übergang $e \rightarrow 0$ sind „S1“ und „S2“ deckungsgleich. In beiden Fällen wirken – unabhängig von e – dieselben mathematischen Gesetzmäßigkeiten (siehe Abschn. 1.2).

Bild 1.7: Mögliche Gleichgewichtslagen

Zusammenfassung: Elastische Systeme verformen sich unter Lasteinwirkung. Druckkräfte können die Verformungen und damit das Tragverhalten des Systems insgesamt ungünstig beeinflussen. In diesem Fall muss die Schnittgrößenermittlung am verformten System, also nach Theorie II. Ordnung erfolgen, um eine sichere Bemessung seiner Bauteile zu gewährleisten. In besonderen Fällen sind Systeme aufgrund ihrer Geometrie und der Art der Lasteinleitung biegemomentenfrei und halten ihre gestreckte Lage bei. Ab einem bestimmten Lastniveau, dessen untere Grenze die kritische Last F_{crit} darstellt, weicht das System bei einer Lagestörung unvermittelt in eine ausgelenkte Lage aus und versagt. Die Untersuchung solcher Systeme, insbesondere die Bestimmung der kritischen Lasteinwirkung ist Gegenstand der **Stabilitätstheorie**.

1.2 Elastisches Knicken gerader Stäbe

Die in Bild 1.8 dargestellte Kragstütze ist ein typisches und häufig vorzufindendes Bauelement, das hohe lotrecht wirkende Lasten aufzunehmen hat. Diese Stütze soll als Beispiel für die nachfolgende Herleitung der differentiellen Beziehungen zwischen den maßgebenden Zustandsgrößen unter Berücksichtigung der Stabverformungen (Theorie II. Ordnung) herangezogen werden. Es ist das Ziel, die kritische Last F_{crit} zu berechnen.

Die Lasteinleitung kann zentrisch ($e = 0$) oder exzentrisch ($e > 0$) erfolgen. Für die nachfolgende Herleitung werden folgende Annahmen vorausgesetzt:

- Die Last F bleibt auch bei einer Stabverformung richtungstreu,
- der Werkstoff ist ideal homogen und isotrop,
- das Hookesche Gesetz gilt uneingeschränkt und
- die Querschnittswerte sind über die Stablänge konstant.

Die Gleichgewichtsbeziehungen am unverformten System lauten bekanntermaßen (siehe Bild 1.8, a):

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x = 0 & \rightarrow N_{(x)} = -F \\
 \Sigma F_z = 0 & \rightarrow V_{z(x)} = 0 \\
 \Sigma M_y^{(1)} = 0 & \rightarrow M_{y(x)} = -F \cdot e
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

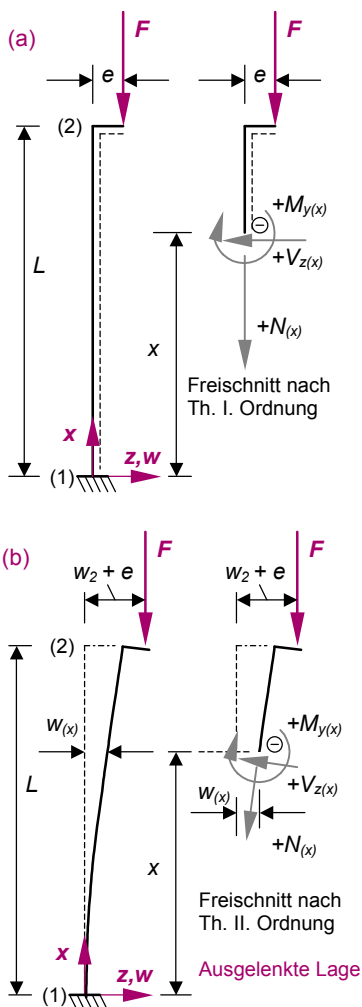


Bild 1.8: Gleichgewicht am (a) unverformten und (b) verformten Stababschnitt

Mit der Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Biegemoment und der Krümmung als resultierende Verzerrungsgröße

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$$

und der kinematischen Beziehung $\kappa \approx w''$ erhält man die bekannte Differentialgleichung für biegebeanspruchte Stäbe nach Theorie I. Ordnung:

$$\kappa_{y(x)} = \frac{M_{y(x)}}{E \cdot I_y} \approx -w''_{(x)} \rightarrow w''_{(x)} = \frac{F \cdot e}{E \cdot I_y} \quad (1.2)$$

Diese Gleichung muss für die Berechnung nach Theorie II. Ordnung erweitert werden, da die Schnittgrößen von der Verformung $w_{(x)}$ bislang unabhängig sind. Dazu werden die Gleichgewichtsbedingungen am verformten Stababschnitt aufgestellt. Wie bei Theorie II. Ordnung üblich wird vorausgesetzt, dass die Verformungen klein sind. Die geringe Stabneigung wird vernachlässigt, sodass $N_{(x)}$ und $V_{z(x)}$ weiterhin als vertikal bzw. horizontal wirkend angesehen werden; es gilt gemäß Bild 1.8, b:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow N_{(x)} = -F \\ \sum F_z = 0 &\rightarrow V_{z(x)} = 0 \\ \sum M_y^{(1)} = 0 &\rightarrow M_{y(x)} = -F \cdot (e + w_2 - w_{(x)}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Jetzt wird deutlich, dass das Biegemoment von der unbekanntem Verformungsgröße $w_{(x)}$ abhängig ist. Es ergibt sich in Analogie zu Gl. (1.2) folgender Zusammenhang:

$$w''_{(x)} = \frac{-M_{y(x)}}{E \cdot I_y} = \frac{F \cdot (e + w_2 - w_{(x)})}{E \cdot I_y} \quad (1.4)$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_y} \quad (1.5)$$

erhält man nach entsprechender Umformung die folgende **inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung** nach Gl. (1.6):

$$w''_{(x)} + \alpha^2 \cdot w_{(x)} = \alpha^2 \cdot (e + w_2) \quad (1.6)$$

Hinweis: Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die eine unbekanntem Funktion mit unabhängigen Veränderlichen und Ableitungen eben dieser Funktion enthält. Um eine DGL zu lösen, muss eine Funktion gefunden werden, die mit ihren Ableitungen der Gleichung genügt. Eine inhomogene DGL zeichnet sich dadurch aus, dass die „rechte Seite“ der DGL ungleich null ist

Die DGL nach Gl. (1.6) hat die allgemeine Lösung

$$w_{(x)} = w_{h(x)} + w_{p(x)} \quad (1.7)$$

und setzt sich zusammen aus dem Lösungsanteil der **homogenen** Differenzialgleichung $w_{h(x)}$ mit

$$w_{h(x)}'' + \alpha^2 \cdot w_{h(x)} = 0 \quad (1.8)$$

und dem partikulären Lösungsanteil $w_{p(x)}$ der inhomogenen Differenzialgleichung

$$w_{p(x)}'' + \alpha^2 \cdot w_{p(x)} = \alpha^2 \cdot (e + w_2). \quad (1.9)$$

Als zielführender Ansatz für den homogenen Lösungsanteil wird gewählt:

$$w_{h(x)} = C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x \quad (1.10)$$

Durch zweimalige Ableitung dieser Ansatzfunktion und dem Einsetzen in Gl. (1.8) kann Gl. (1.10) als zutreffende homogene Lösung bestätigt werden. Als Ansatz für den partikulären Lösungsanteil wird bei dieser Art der DGL ein Polynom 1. Ordnung bestimmt; es lautet:

$$w_{p(x)} = C_3 \cdot w_{(x)} + C_4 \quad (1.11)$$

Durch zweimalige Ableitung dieses Polynoms und dem Einsetzen in Gl. (1.9) entsteht:

$$0 + \alpha^2 \cdot (C_3 \cdot w_{(x)} + C_4) = \alpha^2 \cdot (e + w_2) \quad (1.12)$$

Mithilfe eines Koeffizientenvergleichs ergibt sich folgende Lösung:

$$C_3 = 0; C_4 = e + w_2 \rightarrow w_{p(x)} = e + w_2 \quad (1.13)$$

womit als vollständige Lösung gemäß Gl. (1.7) nun

$$w_{(x)} = C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x + e + w_2 \quad (1.14)$$

angegeben werden kann. Die verbleibenden Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den geometrischen Randbedingungen am Stützenfuß. Das dreiwertige Lager verhindert eine horizontale Verschiebung und eine Verdrehung; es gilt:

$$\begin{aligned} w_{(x=0)} = 0 &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + e + w_2 \rightarrow C_2 = -e - w_2 \\ \varphi_{(x=0)} = w'_{(x=0)} = 0 &= \alpha \cdot C_1 \cdot 1 - \alpha \cdot C_2 \cdot 0 \rightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Mit diesen Werten führt Gl. (1.14) auf folgende **Verformungsgleichung**:

$$w_{(x)} = (1 - \cos \alpha x) \cdot (e + w_2) \quad (1.16)$$

Um für weitere Betrachtungen die Exzentrizität e oder die Verformungsgröße w_2 auf der rechten Seite zu eliminieren, wird mit

$$w_2 = w_{(x=L)} = (1 - \cos \alpha L) \cdot (e + w_2) \quad (1.17)$$

und der Umformung dieser Beziehung zu

$$e + w_2 = \frac{w_2}{1 - \cos \alpha L} \quad \text{bzw.} \quad e + w_2 = \frac{e}{\cos \alpha L} \quad (1.18)$$

die endgültige Funktion für die Biegelinie der Kragstütze bestimmt. Durch Einsetzen der Beziehungen nach Gl. (1.18) in Gl. (1.16) entsteht:

$$w_{(x)} = \frac{(1 - \cos \alpha x) \cdot w_2}{1 - \cos \alpha L} \quad (1.19)$$

beziehungsweise

$$w_{(x)} = \frac{(1 - \cos \alpha x) \cdot e}{\cos \alpha L} \quad (1.20)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen lassen sich folgende Rückschlüsse über die Stabilität und das Last-Verformungsverhalten der Kragstütze ziehen:

- Die Verformung $w_{(x)}$ ist proportional der Lastexzentrizität e . Ist diese gleich null, so erfolgt mit $w_{(x)} = 0$ keine Auslenkung.
- Mit $e = 0$ ist trotzdem eine unbestimmte und von null verschiedene Auslenkung möglich, wenn der Nenner in Gl. (1.20) verschwindet. Das ist dann gegeben, wenn

$$\cos \alpha L = 0 \quad (1.21)$$

ist.

- Wenn Gl. (1.21) erfüllt und eine unbestimmte Auslenkung des Systems gegeben ist, so ist diese Biegelinie gemäß Gl. (1.19) eine Kosinusfunktion. Da w_2 nicht bestimmt werden kann, bleibt die Amplitude dieser Funktion unbestimmt.

Gl. (6.21) wird als **Eigenwertgleichung des Stabilitätsproblems** für die oben dargestellte Kragstütze (Bild 1.8) bezeichnet. Die Eigenwertgleichung ist erfüllt für

$$\alpha L = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (1.22)$$

Die Lösungen werden **Eigenwerte** genannt. Aus dem ersten positiven Eigenwert folgt die interessierende kritische Belastung der Kragstütze, die sogenannte **Knicklast** gemäß:

$$\alpha L = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_y}} \cdot L = \frac{\pi}{2} \rightarrow F_{\text{crit}} = F_{\text{Ki}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{4 \cdot L^2} \quad (1.23)$$

Bei Erreichen oder Überschreiten dieser Last knickt der einseitig eingespannte Stab unvermittelt aus und nimmt eine Knickfigur nach Gl. (6.19) an, wenn die Lasteinleitung zentrisch mit $e = 0$ erfolgt. Der Zusammenhang zwischen der einwirkenden Druckkraft F und der horizontalen Kopfauslenkung w_2 wird durch die Linie „S1“ des Last-Verformungsdiagramms in Bild 1.6 charakterisiert. In welcher Richtung und in welchem Maße der Stab ausknickt, ist unbestimmt, da für Gl. (1.19) keine Bedingung über das Vorzeichen und die Größe von w_2 gegeben ist.

Der zusätzliche Index i in Gl. (1.23) weist auf ideale Verhältnisse hin, die es in der Realität nicht gibt. Es sind immer Störungen (Imperfektionen in der Geometrie oder im Werkstoff) vorhanden, die das Erreichen oder gar das Überschreiten der Knicklast ($F > F_{crit}$) unmöglich machen. Ein labiles Gleichgewicht ist damit in der Realität ausgeschlossen.

Das Knicken von Stäben wurde zum ersten Mal von **Leonard Euler** (1707 – 1783) untersucht. Er berechnete neben dem einseitig eingespannten Stab auch andere typische Lagerungsfälle und ordnete ihnen entsprechende Knicklasten zu. Er fasste seine Ergebnisse in der so genannten **Euler-Formel** zusammen:

$$F_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{s_K^2} \quad (1.24)$$

Darin ist s_K die sogenannte **Knicklänge**, die den Abstand der Wendepunkte in der Knickfigur (verformte Achse) des untersuchten Stabes darstellen (siehe Bild. 1.9). Als $E \cdot I$ wird die Biegesteifigkeit bezüglich der Achse senkrecht zur Knickebene eingesetzt.

Eulerfall 1	Eulerfall 2	Eulerfall 3	Eulerfall 4
			(w) = Wendepunkt in Knickfigur
Eigenwertgleichung und kleinster Eigenwert:			
$\cos(\alpha \cdot L) = 0$ $\alpha \cdot L = 0,5 \cdot \pi$	$\sin(\alpha \cdot L) = 0$ $\alpha \cdot L = \pi$	$\tan(\alpha \cdot L) = \alpha \cdot L$ $\alpha \cdot L = 4,49$	$\alpha \cdot L \cdot \sin(\alpha \cdot L) = 2 - 2 \cdot \cos(\alpha \cdot L)$ $\alpha \cdot L = 2 \cdot \pi$
$F_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(2 \cdot L)^2}$	$F_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$F_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(0,6993 \cdot L)^2}$	$F_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(0,5 \cdot L)^2}$
$F_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{s_K^2}$ mit $s_K = \beta \cdot L$			
$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 0,6993 \approx 0,7$	$\beta = 0,5$

Bild 1.9: Eulerfälle mit Eigenwertgleichungen und Lösungen

In Bild 1.9 werden die Knickfiguren, die Knicklasten und die Knicklängen für alle Eulerfälle, d.h. für 4 druckbeanspruchte Stäbe mit unterschiedlichen Lagerbedingungen dargestellt. Man erkennt an den Knickfiguren, dass die Eulerfälle 2, 3 und 4 aus dem Eulerfall 1 abgeleitet werden können. Die Sinus-Viertelwelle des Eulerfalls 1 ist genau zweifach im Eulerfall 2, annähernd dreifach im Eulerfall 3 und exakt vierfach im Eulerfall 4 zu finden. Durch Einführung der Knicklänge s_K , die der Länge einer Verformungshalbwelle und damit dem Abstand der Wendepunkte in der Knickfigur entspricht, können die Knicklasten von unterschiedlich gelagerten Stäben mit einer einzigen Formel gemäß Gl. (1.24) bestimmt werden. Allgemein gilt für die Knicklänge eines Stabes:

$$s_K = \beta \cdot L \quad (1.25)$$

Der **Beiwert** β gibt das Verhältnis der Länge der Verformungshalbwelle zur Stablänge an. In der Fachliteratur sind vielfach β -Werte zu finden, die eine Knicklängenberechnung auch für mehrteilige Stabsysteme und solche mit elastischen Lagerbedingungen (z.B. Drehfedern) ermöglichen.

Die in Bild 1.9 und den Gl. (1.24) bis (1.28) dargestellten Formelzeichen für das Trägheitsmoment I , die Knicklänge s_K und den Trägheitsradius i sind ohne einen weiteren Index zur Kennzeichnung der Achsen, um die das System ausknickt, angeführt worden. Natürlich kann ein gedrückter Stab – abhängig von der Isotropie des Querschnittes und/oder der Lagerbedingungen – in alle Richtungen ausknicken. Das Knickproblem ist in der Regel ein räumliches Problem; vgl. nachfolgende Zusammenstellung.

Tabelle 1.1 Unterscheidung bei Knickproblemen im Raum

		Lagerbedingungen in Richtung der Hauptachsen	
		isotrop	anisotrop
Querschnittsabmessungen	isotrop	Alle Knickebenen sind gleichwertig. Ein Ausknicken ist in jede Richtung möglich. <i>Beispiel:</i> Stütze mit Kreisquerschnitt und gleichartigen Lagerbedingungen an den Stabenden in orthogonalen Richtungen	Das System knickt in der Ebene mit der größten Knicklänge aus. <i>Beispiel:</i> Stütze mit quadratischem Querschnitt, jedoch unterschiedlichen Lagerbedingungen in Richtung der Querschnittsachsen.
	anisotrop	Das System knickt um die Achse mit I_{\min} . Die Richtung des Ausknickens ist senkrecht dazu. <i>Beispiel:</i> Stütze mit Rechteckquerschnitt und gleichwertigen Lagerbedingungen in Richtung der Querschnittsachsen	Hier müssen die jeweiligen Knicklasten um die Hauptachsen des Querschnitts bestimmt werden. Der kleinste Knickwert bestimmt die Knickrichtung. <i>Beispiel:</i> Stütze mit Rechteckquerschnitt, aber unterschiedlichen Lagern in Richtung der Hauptachsen (<i>Bild 6.11</i>).

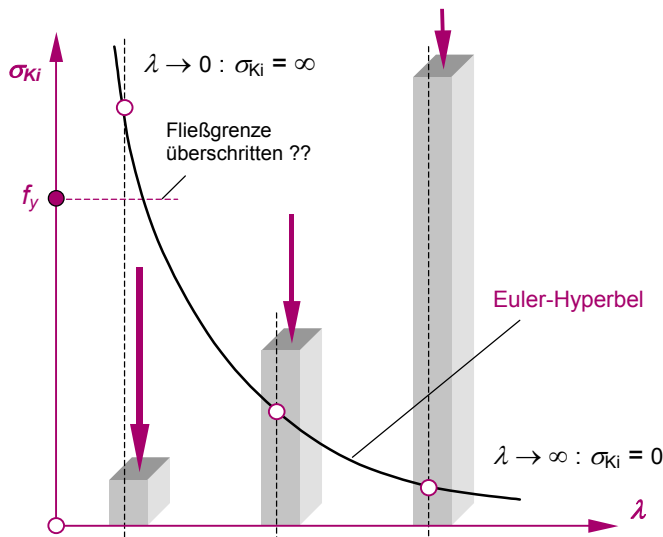
Neben den Begriffen Knicklast und Knicklänge wird im Zusammenhang mit knickgefährdeten Stäben auch über die Knickspannung und den Schlankheitsgrad gesprochen. Die **Knickspannung** σ_{Ki} ergibt sich aus der Division der **idealen Knicklast** F_{Ki} durch die Querschnittsfläche A des untersuchten Stabes:

$$\sigma_{Ki} = \frac{F_{Ki}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{s_K^2 \cdot A} \quad (1.26)$$

Setzt man die bekannte Formel für den Trägheitsradius in Gl. (1.26) ein, so erhält man

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \rightarrow \sigma_{Ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{s_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (1.27)$$

Gl. (1.27) ist eine Hyperbelfunktion in Abhängigkeit von λ und wird als Euler-Hyperbel bezeichnet. Ihre Darstellung erfolgt in Bild 1.10.



Bei der Herleitung der Eulerschen Knicklast wird die uneingeschränkte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes bei unendlicher Festigkeit vorausgesetzt. Daher ist es nachvollziehbar, dass die Stäbe mit kleinem Schlankheitsgrad (gedrungene Stäbe) eine „unzulässige“ Knickspannung aufweisen.

Im Abschnitt 1.3 wird deshalb das Biegeknicken im **plastischen** Bereich behandelt.

Bild 1.10: Euler-Hyperbel

Das Verhältnis Knicklänge zu Trägheitsradius wird als Schlankheitsgrad λ bezeichnet und ist ein maßgebender Parameter bei der Bemessungsprozedur für knickgefährdete Stäbe; es gilt:

$$\lambda = \frac{s_K}{i} \quad (1.28)$$

Die Knickspannung σ_{Ki} nimmt bei ansteigendem Schlankheitsgrad ab und erreicht im Extremfall den Wert Null. Man erkennt, dass bei gedrungenen Stäben mit kleinen Werten für L bzw. λ die kritische Spannung deutlich ansteigt und gegebenenfalls die Fließgrenze überschritten wird. In diesem Fall ist die Stabilitätsfrage als Sicherheitsproblem hinfällig, weil nun das Material zerquetscht und die Tragfähigkeit des Bauteils allein durch die Materialeigenschaften bestimmt wird. Bei $\lambda \rightarrow 0$ erreicht die Knickspannung den theoretischen Wert unendlich.

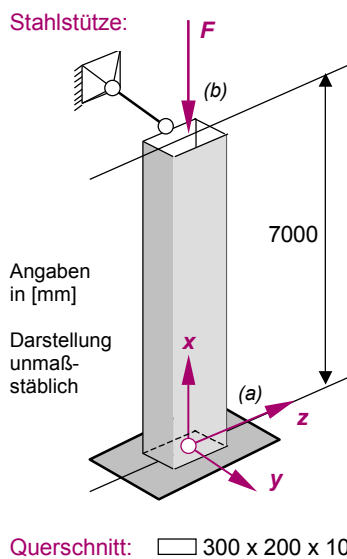
Der Schlankheitsgrad ist wie das Flächenträgheitsmoment I , der Trägheitsradius i und die Knicklänge s_K ein achsenbezogener Wert und wird mit einem Index versehen, um Verwechslungen bei der Knickrichtung bzw. Knickebene zu vermeiden (vgl. Beispiel 1.2). Dieser Index bezieht sich auf die Achse, die senkrecht zur **Knickrichtung** steht. Bei unsymmetrischen Querschnitten werden die entsprechenden **Hauptachsen** betrachtet. Sind die Knicklängen bezüglich der Querschnittshauptachsen gleich lang ($s_{K,y} = s_{K,z}$), so knickt der Stab immer um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsradius bzw. Trägheitsmoment.

Spricht man vom Knicken in z-Richtung, so meint man damit Knicken um die y-Achse und umgekehrt. Stäbe können auch um die starke Achse knicken, wenn die Lagerbedingungen bezüglich dieser Achse besonders ungünstig sind. Entscheidend ist also die Größe des jeweiligen Schlankheitsgrades. Je größer der Schlankheitsgrad, desto höher ist die Gefahr des Stabilitätsversagens.

Beispiel 1.2: Berechnung des Schlankheitsgrades einer Stahlstütze

Gegeben:

Für die dargestellte Stahlstütze sollen die maßgebende Knicklänge s_K , die zugehörige Knicklast F_{Ki} und der Schlankheitsgrad λ berechnet werden. Die am Fuß eingespannte Stütze besteht aus einem rechteckigen Hohlprofil mit gleichbleibendem Querschnitt (wie angegeben). Der Stützenkopf ist in z-Richtung frei verschieblich; dagegen in y-Richtung horizontal unverschieblich gehalten.



Lösung:

Die Querschnittsfläche und die axialen Trägheitsmomente werden als Ablesewerte bautechnischen Tabellenwerken entnommen.

$$A = 94,9 \text{ cm}^2 ; I_y = 11819 \text{ cm}^4 ; I_z = 6278 \text{ cm}^4$$

Die Trägheitsradien bestimmen sich zu:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{11819}{94,9}} = 11,16 \text{ cm} ; i_z = \sqrt{\frac{6278}{94,9}} = 8,13 \text{ cm}$$

Mithilfe des für Baustahl gültigen Elastizitätsmoduls $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ können die Biegesteifigkeiten bezüglich der Querschnittsachsen bestimmt werden:

$$E \cdot I_y = 21000 \cdot 11819 = 2,482 \cdot 10^8 \text{ kNm}^2 = 24820 \text{ kNm}^2$$

$$E \cdot I_z = 13184 \text{ kNm}^2$$

Betrachten wir zunächst die „schwache“ Achse: Für das Knicken um die z-Achse (Knicken in y-Richtung → Knickebene ist die x-y-Ebene) ergibt sich aufgrund der Lagerbedingungen eine Knicklänge gemäß Gl. (1.25) von

$$s_{K,z} = \beta_z \cdot L = 0,7 \cdot 7,0 = 4,90 \text{ m}$$

Damit kann über Gl. (1.24) eine Knicklast von

$$F_{Ki,z} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{s_{K,z}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 13184}{4,9^2} = 5419,4 \text{ kN}$$

und ein Schlankheitsgrad gemäß Gl. (1.28)

$$\lambda_z = \frac{s_{K,z}}{i_z} = \frac{4,9 \cdot 10^2}{8,13} = 60,2$$

berechnet werden. Die Knickspannung errechnet sich mit Gl. (1.27) zu:

$$\sigma_{Ki,z} = \frac{F_{Ki,z}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_z^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000}{60,2^2} = 57,1 \text{ kN/cm}^2$$

Da das System einen anisotropen Querschnitt und anisotrope Lagerbedingungen in Richtung der Querschnittsachsen aufweist, muss auch das Knicken um die y-Achse (Knicken in z-Richtung → Knickebene ist die x-z- Ebene) untersucht werden. Die analoge Rechnung führt auf folgende Ergebnisse:

$$s_{K,y} = \beta_y \cdot L = 2,0 \cdot 7,0 = 14,0 \text{ m}$$

$$F_{K,i,y} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{s_{K,y}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 24820}{14,0^2} = 1249,8 \text{ kN} < 5419,4 \text{ kN}$$

$$\lambda_y = \frac{s_{K,y}}{i_y} = \frac{14,0 \cdot 10^2}{11,16} = 125,5$$

$$\sigma_{K,i,y} = \frac{F_{K,i,y}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_y^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000}{125,5^2} = 13,2 \text{ kN/cm}^2$$

Der kleinste Knickwert bestimmt die Knickrichtung. Damit ist das Knicken um die y-Achse der maßgebende Stabilitätsfall. Die entsprechend große Schlankheit weist auf eine hohe Knickgefährdung hin. Die hier errechnete Knicklast bzw. Knickspannung darf in der Praxis nicht erreicht werden. Auch stabilitätsgefährdete Bauteile müssen im Rahmen der durch die Baunormen vorgegebenen Tragsicherheitsnachweise so dimensioniert werden, dass die planmäßigen Beanspruchungen deutlich unter den Knickwerten bleiben. Der Abstand wird durch bauteil- und werkstoffspezifische Sicherheitsbeiwerte oder Abminderungsfaktoren bestimmt.

1.3 Biegeknicken im plastischen Bereich

Die theoretischen Betrachtungen in Kapitel 1.2 setzen die uneingeschränkte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes voraus. Es gibt jedoch keinen Werkstoff, der diese Voraussetzung erfüllt. Im Falle des Werkstoffs Stahl besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen lediglich bis zur **Proportionalitätsgrenze** σ_p , die um bis zu 20% unterhalb der Fließgrenze f_y liegen kann. Durch Umformung der Gl. (1.27) lässt sich der zugehörige Schlankheitsgrad λ_p bestimmen; es gilt:

$$\lambda_{p=} \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \geq \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{0,8 \cdot f_y}} \quad (1.29)$$

Damit liegt ein Grenzwert vor. Gedrückte Stäbe mit einem Schlankheitsgrad $\lambda > \lambda_p$ gehorchen der Euler-Formel und versagen bei Erreichen der Knickspannung durch elastisches Knicken, indem sie seitlich ausweichen (siehe Bild 1.11). Dabei hat die Versagensgrenze des Werkstoffs (Fließgrenze) keinerlei Einfluss.

Bei schlanken Stäben mit einem Schlankheitsgrad $\lambda > \lambda_p$ kann die Gefahr des Knickens nicht durch Wahl eines Werkstoffs mit höherer Festigkeit verringert werden. Es ist somit unwirtschaftlich, schlanke Stützen in einer höheren Stahlsorte auszuführen.

Bei gedungenen Stäben mit einem geringen Schlankheitsgrad besteht die Knickgefahr nicht. Diese Stäbe versagen durch Überschreiten der aufnehmbaren Druckspannung und werden zerquetscht. Die theoretische Knickspannung σ_{ki} liegt weit über diesem Wert und hat für die Bemessung des Bauteils keine Bedeutung. In den Baunormen werden deshalb immer unterschiedliche Verfahren zur Bemessung

druckbeanspruchter Bauteile vorgegeben, wobei man zwischen stabilitätsgefährdeten und nicht stabilitätsgefährdeten Bauteilen unterscheidet.

Neben den beiden eindeutigen Versagensformen gibt es einen **Übergang** vom Fließen in das elastische Knicken. Oberhalb der **Proportionalitätsgrenze** fällt die Steigung des Spannungs-Dehnungsverlaufes von ihrem Maximalwert – dieser ist identisch mit dem Elastizitätsmodul E – auf nahezu null ab. Beim Ausknicken trägt das einsetzende Biegemoment auf der zur Knickrichtung abgewandten Seite des Querschnittes zu einer Erhöhung der Druckspannungen bei. Dieser Querschnittsbereich geht zunehmend von den Randfasern her in den plastischen Zustand über und trägt zu einer stetigen Reduzierung der Biegesteifigkeit $E \cdot I$ des Stabquerschnitts bei. Damit ändert sich ein entscheidender Parameter bei der Bestimmung der Eulerschen Knicklast F_{Ki} (vgl. Gl. (1.24)). Zudem werden die Voraussetzungen, die für die Herleitung der Euler-Formel getroffen worden sind, nicht mehr erfüllt.

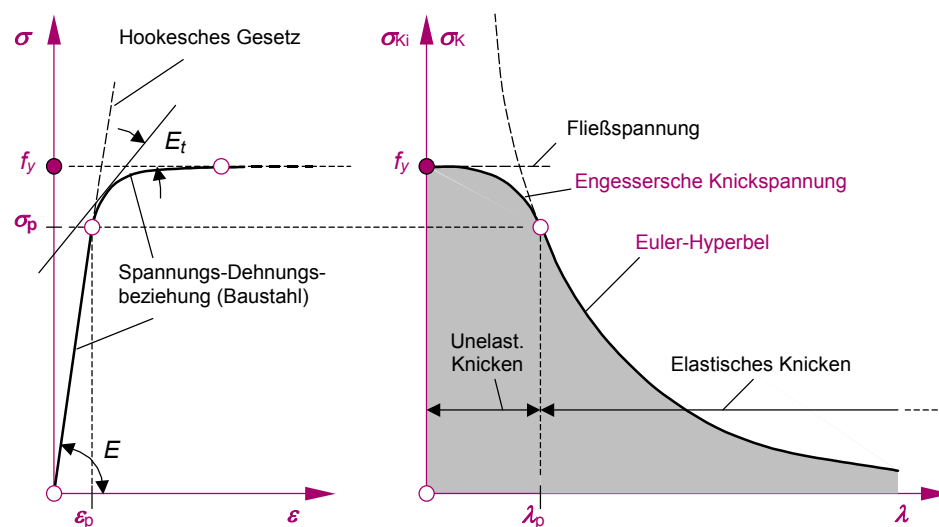


Bild 1.11: Gültigkeit der Euler-Formel

Durch Aufgabe der uneingeschränkten Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes hat Friedrich Engesser (1848 – 1931) in seinen theoretischen Abhandlungen Knickspannungen σ_K eingeführt, die im Bereich $0 < \lambda < \lambda_p$ kleiner als σ_{Ki} sind. Für $\lambda \rightarrow 0$ geht die Knickspannung σ_K gegen f_y . Die Spannungs-Dehnungslinie des Stahls oberhalb der Proportionalitätsgrenze $\sigma_p = 0,8 \cdot f_y$ wird dazu wirklichkeitsnah durch folgende Funktion beschrieben:

$$\sigma = f_y \cdot \left(0,8 + 0,2 \cdot \tanh \frac{E \cdot \varepsilon - 0,8 \cdot f_y}{0,2 \cdot f_y} \right) \quad (1.30)$$

Unter Berücksichtigung der Teilplastizierung des Querschnitts und Einführung eines besonderen **Engesserschen Knickmoduls T** (vgl. Bild 1.12) mit

$$T = \frac{4 \cdot E_t \cdot E}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E})^2} \quad \text{und} \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \text{für} \quad \varepsilon > \varepsilon_p \quad (1.31)$$

gelingt es, für den Gültigkeitsbereich $\sigma_p \leq \sigma_K \leq f_y$ einen Zusammenhang zwischen dem Schlankheitsgrad λ und der **Engesserschen Knickspannung** σ_K herzustellen:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_K}{E}} \cdot \left(0,5 + \frac{0,5 \cdot (f_y - \sigma_P)}{\sqrt{(f_y - \sigma_P)^2 - (\sigma_K - \sigma_P)^2}} \right) \quad (1.32)$$

Bild 1.11 zeigt den Funktionsverlauf in qualitativer Form an. Auf eine genaue Herleitung der Gl. (1.32) soll im Rahmen dieses Buches verzichtet werden.

Mit der Eulerschen und Engesserschen Knickspannung sind die theoretischen Grundlagen für die Bemessung stabilitätsgefährdeter Bauteile gegeben. Die in Bild 1.11 dargestellten Verläufe stellen eine **absolute Grenze** für geometrisch und werkstofflich **ideale Systeme** und ihre theoretisch aufnehmbaren Druckspannungen dar. Unsere Bauwerke und Werkstoffe erfüllen diese Anforderungen nicht. Die Bauteile sind weder perfekt gerade, noch werden die Lasten exakt zentrisch eingeleitet. Betrachtet man den üblichen Stahlbau, so sind durch Walz- und/oder Schweißvorgänge auch im unbelasteten Zustand bereits Eigenspannungen im Bauteil vorhanden, die besonders bei stark auf Druck beanspruchten Bauteilen maßgeblichen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten haben. Deshalb hat man im Stahlbau durch zahlreiche Versuche und statistische Analysen alle Effekte untersucht und in Abhängigkeit von der Geometrie und der Art der Herstellung des Querschnittsprofils sogenannte **Knickspannungslinien** entwickelt.

Die Knickspannungslinien – dargestellt in Bild 1.12 – werden in einem Diagramm mit normierten Achsen dargestellt, um diese unabhängig von der verwendeten Stahlgüte verwenden zu können. Auf der Abszisse wird der **bezogene Schlankheitsgrad** aufgetragen. Er wird über die Gleichung

$$\bar{\lambda}_K = \frac{\lambda}{\lambda_a} \quad \text{mit} \quad \lambda_a = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_{yk}}} \quad (1.33)$$

bestimmt. Der Werkstoffparameter f_{yk} ist der charakteristische Wert für die Fließgrenze (ohne Teilsicherheitsbeiwert) und den jeweiligen Fachnormen zu entnehmen. Die Ordinate zeigt den dimensionslosen Wert κ an, der als **bezogene Knickspannung** interpretiert werden kann.

$$\kappa = \frac{\sigma_K}{f_{yk}} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \frac{\sigma_{Ki}}{f_{yk}} \quad (1.34)$$

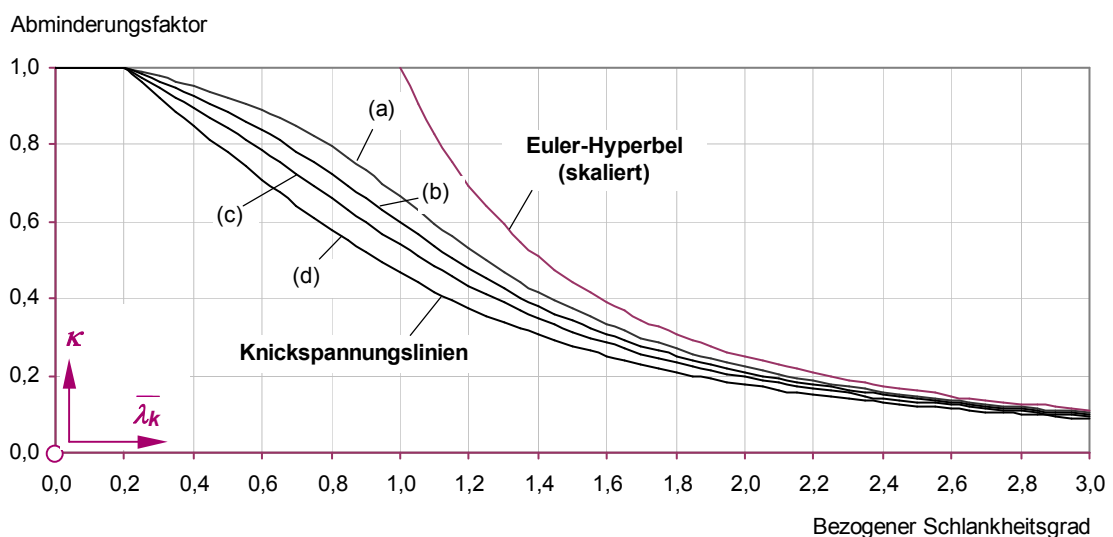


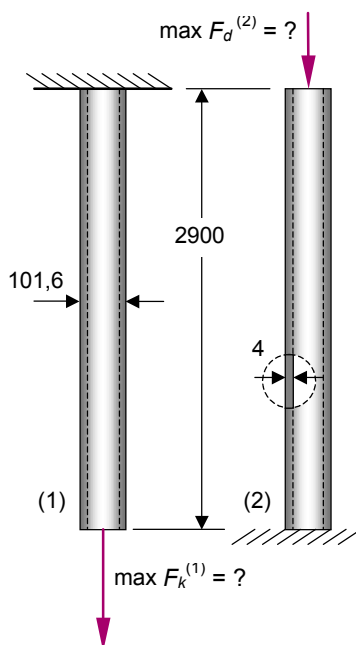
Bild 1.12: Knickspannungslinien

Der κ -Wert stellt in dieser Form einen **Abminderungsfaktor** gegenüber einem nicht stabilitätsgefährdeten Bauteil dar (siehe Beispiel 1.3). Die Abminderung wird erst ab einem bezogenen Schlankheitsgrad von $\bar{\lambda}_K > 0,2$ wirksam, was gemäß Gl. (1.33) einem Schlankheitsgrad von $\lambda > 18,6$ bzw. 15,2 bei Stäben aus einem S 235 respektive S 355 entspricht. Im Übergangsbereich der Engesserschen Knickspannung zwischen $0 < \bar{\lambda}_K < 1,05$ (in Bild 1.12 nicht gesondert dargestellt) gehen die Abminderungsfaktoren je nach zuzuordnender Knickspannungslinie auf Werte zwischen 0,44 und 0,63 zurück und nähern sich im weiteren Verlauf asymptotisch den Grenzwerten der **Euler-Hyperbel** an. Die Zuordnung der Knickspannungslinien a), b), c) oder d) erfolgt nach Art des Stahlherstellungsprozesses (gewalzt, geschweißt, warm oder kalt gefertigt), nach Blechdicke und der Querschnittsform des verwendeten Profils (z.B. Hohl- oder Vollprofile, U-, L- und I-Profile). Im nachfolgenden Rechenbeispiel soll in einem unmittelbaren Vergleich zwischen einem zug- und einem druckbeanspruchten Stab die Bedeutung der **Knickspannungslinien** im Hinblick auf das Bemessungsergebnis gezeigt werden.

Beispiel 1.3: Berechnung des Schlankheitsgrades einer Stahlstütze

Gegeben:

Dargestellt ist ein rundes aus Baustahl S 235 kaltgefertigtes Hohlprofil mit einem Durchmesser von $d = 101,6$ mm und einer Wandstärke von $t = 4$ mm, das zum einen als 2,9 m lange Zugstab (1) und zum anderen als ebenso lange Kragstütze (2) zum Einsatz kommt. Es soll die maximal aufnehmbare Druck- bzw. Zugkraft bestimmt werden. Dabei sind die Grenzspannungen des Stahls nach DIN EN 1993-1 zu berücksichtigen.



Lösung:

Das Hohlprofil mit kreisrundem Querschnitt weist eine Querschnittsfläche von $A = 12,3 \text{ cm}^2$ und ein Flächenträgheitsmoment von $I = 146 \text{ cm}^4$ auf. Aufgrund der Rotationssymmetrie ist jede Querschnittsachse durch den Schwerpunkt eine Symmetrieachse. Auf eine Indexierung der Querschnittswerte kann deshalb verzichtet werden.

Betrachten wir zunächst das **zugbeanspruchte** System. Die Spannung infolge Lasteinwirkung darf die aufnehmbare Spannung im Stahl nicht überschreiten; es gilt:

$$\sigma = \frac{\max F_d^{(1)}}{A} \leq \sigma_{R,d} \rightarrow \max F_d^{(1)} = A \cdot \sigma_{R,d} = 12,3 \cdot 21,82 = 268,4 \text{ kN}$$

Betrachten wir jetzt das **druckbeanspruchte** System. Der Trägheitsradius errechnet sich zu:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{146}{12,3}} = 3,45 \text{ cm}$$

Grenzspannungen $\sigma_{R,d}$ für Walzstahl nach DIN EN 1993-1 (EC 3):

Stahlsorte	$\sigma_{R,d}$ [kN/cm ²]
S 235 ($t \leq 40$ mm)	21,82
S 355 ($t \leq 40$ mm)	32,73

Die Knicklänge ergibt sich aus dem Eulerfall 1 (vgl. Bild 1.9) zu:

$$s_K = \beta \cdot L = 2,0 \cdot 290 = 580 \text{ cm}$$

Der Schlankheitsgrad wird mithilfe der Gl. (1.28) und der bezogene Schlankheitsgrad ($\lambda_\sigma = 92,9$ für S 235) aus Gl. (1.33) berechnet:

$$\lambda = \frac{s_K}{i} = \frac{580}{3,45} = 168,1 \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda}_K = \frac{\lambda_K}{\lambda_a} = \frac{168,1}{92,9} = 1,81$$

Für kaltgefertigte Hohlprofile ist gemäß den Stahlbaunormen die Knickspannungslinie (b) zu wählen, sodass als Abminderungsfaktor κ der Wert 0,25 abgelesen werden und auf der Widerstandsseite für eine Reduzierung der aufnehmbaren Kraft herangezogen kann. Es ist die Bedingung

$$\sigma = \frac{\max F_d^{(2)}}{A} \leq \kappa \cdot \sigma_{R,d}$$

zu erfüllen. Die aufnehmbare Druckkraft errechnet sich somit zu:

$$\max F_d^{(2)} = A \cdot \kappa \cdot \sigma_{R,d} = 12,3 \cdot 0,25 \cdot 21,82 = 67,1 \text{ kN}$$

und erreicht – trotz gleichbleibendem Querschnitt und Material – nur noch ein Viertel der entsprechenden Zugkraft $\max F_d^{(1)}$.

Hinweis: Die einschlägigen Stahlbaunormen geben Formeln an, mit denen die Abminderungsfaktoren κ genau bestimmt werden können. In den bautechnischen Tabellenwerken findet man diese auch in Tabellen aufbereitet, sodass die κ -Werte unmittelbar in Abhängigkeit von der maßgebenden Knickspannungslinie und dem bezogenen Schlankheitsgrad abgelesen werden können.

1.4 Weitere Versagensfälle durch Instabilität

Neben dem in Abschnitt 1.3 behandelten Standardfall des reinen **Biegeknickens** gibt es in der Praxis weitere Versagensfälle infolge Instabilität. Die Art des Versagens wird neben den Lagerbedingungen und der Stablänge wesentlich von der Querschnittsform und der Lage des Lastangriffsortes bezüglich der Stabachse bestimmt.

- **Biegeknicken (BK):** Diese Versagensart ist typisch für Stäbe unter zentrisch oder exzentrisch wirkender Druckbeanspruchung. Maßgebend für das Versagen ist die Längsdruckkraft N und das Biegemoment M_y bzw. M_z . Abhängig von der Größe der Biegesteifigkeiten $E \cdot I_y$ und $E \cdot I_z$ versagen solche Stäbe vorzeitig durch Ausweichen in z - oder y -Richtung, ohne dass es dabei zu einer Verdrehung um die Längsachse kommt (Bild 1.13, a). Aufgrund ihrer Querschnittsform besitzen die Stäbe in der Regel eine ausreichende Steifigkeit gegen Verdrehen um die eigene Längsachse.

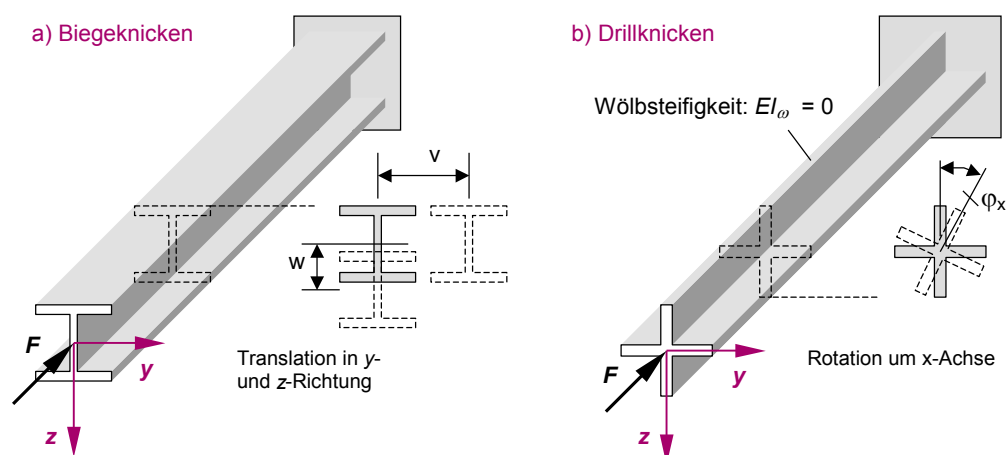


Bild 1.13: Versagensfälle Biegeknicken und Drillknicken

- Drillknicken (DK):** Diese Versagensart kann bei Stäben unter zentrisch wirkender Druckbeanspruchung auftreten. Stäbe, die auf Drillknicken versagen, besitzen keine oder nur eine sehr geringe Steifigkeit gegen Verdrehen um die eigene Längsachse. Die Verdrehsteifigkeit wird durch die Größe der **St.-Venantschen Torsionssteifigkeit** $G \cdot I_T$ und/oder die **Wölbsteifigkeit** $E \cdot I_\omega$ beeinflusst. Die Stäbe versagen durch eine unvermittelt einsetzende Verdrehung um die eigene Achse (Bild 1.13, b). Typische Querschnitte bei diesen Stäben sind dünnwandige Winkel- oder Kreuzprofile. Ihre Versagenslast ist die **Drillknicklast** $N_{ki,\theta}$, die bei dieser Art der Instabilität kleiner als die Eulersche Knicklast (Biegeknicklast) ist.
- Biegedrillknicken (BDK):** Dieser Versagensfall tritt bei biegebeanspruchten Trägern mit und ohne Normalkraft auf, wobei jetzt das Biegemoment maßgebend ist. Biegedrillknicken zeichnet sich dadurch aus, dass hohe Biegedruckspannungen in destabilisierender Weise zu einem seitlichen Ausknicken des Druckgurtes führen. Durch die destabilisierende Wirkung des Zuggurtes entziehen sich diese Träger im Versagensfall den Lasten durch gleichzeitiges Verdrehen um die Stabachse und Verschieben in Richtung der Querschnittsachsen (Bild 6.16, a). Mit der seitlichen Auslenkung der Gurte wandern in der Regel die Lasten mit ihren Lastangriffspunkten aus der Trägerachse heraus und vergrößern – mit Ausnahme der „angehängten“ Lasten – die Verdrehung des Querschnitts durch die einsetzende Torsionsbeanspruchung (Bild 1.14 b). Hohlquerschnitte mit ihrer hohen Torsionssteifigkeit sind im Gegensatz zu den offenen dünnwandigen Querschnitten nicht biegedrillknickgefährdet. Der Versagenszustand wird durch das **ideale Biegedrillknickmoment** M_{ki} gekennzeichnet

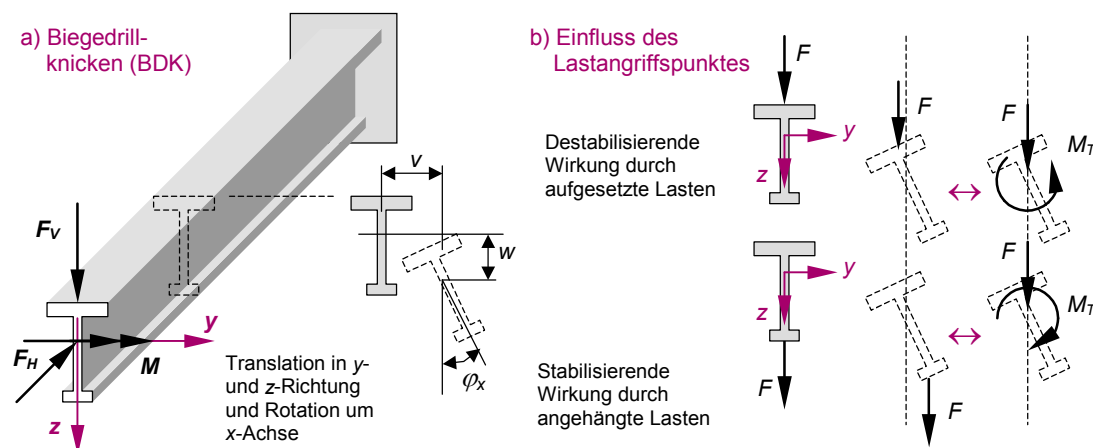


Bild 1.14: Versagensfall Biegedrillknicken

Durch **Festhaltungen am Druckgurt** quer zur Trägerlängsachse kann der Schlankheitsgrad des Druckgurtes soweit reduziert werden, dass die Gefahr des Biegedrillknickens ausgeschlossen werden kann. Im Zusammenhang mit dem Versagensfall Biegedrillknicken verwendet man – meist umgangssprachlich – auch den Begriff „Kippen“, wenn allein aus einer Biegebeanspruchung heraus der Obergurt aufgrund seiner hohen Druckbeanspruchung seitlich ausschlägt und zu einem „Umkippen“ des Trägers führt.

- Beulen:** Diese Versagensform tritt vor allem bei dünnwandigen Bauteilen auf, die hohen Druck-, Biegedruck- und/oder Schubspannungen aufgesetzt sind und ab einem kritischen Spannungszustand seitlich ausbeulen können. Dabei kann es sich um ganze Stegbleche beispielsweise eines Kastenträgers oder auch um Teilflächen eines Bleches – sogenannte **Beulfelder** – handeln, die durch Aussteifungselemente wie angeschweißte Rippen, Querschotte oder Gurte bzw. durch sonstige angrenzende Bauteile am seitlichen Ausweichen gehindert werden. Die Form der Beulfi-

gur ist abhängig von der Höhe und dem Verlauf der Beanspruchung, den Seitenverhältnissen des Beulfeldes und der Steifigkeit und Art der Aussteifungselemente. Im Versagensfall können sich in den beiden Richtungen des Beulfeldes unterschiedlich viele Halbwellen einstellen (Bild 1.15).

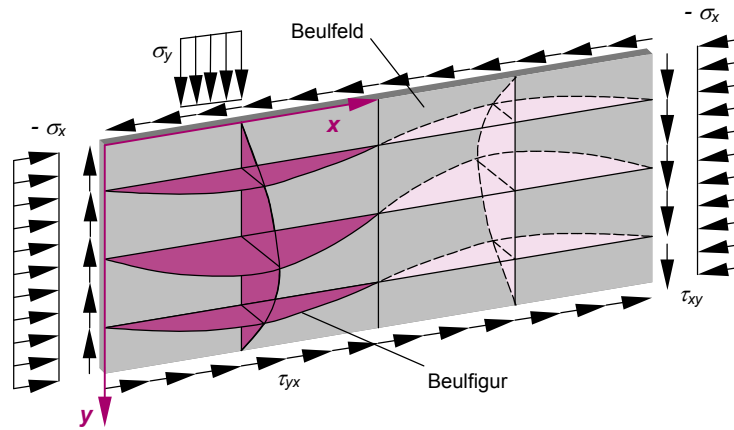


Bild 1.15: (Platten-)Beulen