Grundlagen für Matrizenmethoden in der Baustatik

Es werden einige Definitionen und Rechenregeln für Matrizen und Vektoren zusammenfassend dargestellt. Die Ausführungen beschränken sich auf elementare Grundlagen, wie sie für das Verständnis der Matrizenmethoden für Stabwerke erforderlich sind.

1.1 Definition der Matrix

Unter einer *Matrix der Ordnung* $[m \times n]$ versteht man $m \times n$ Elemente in einer rechteckigen Anordnung zu m Zeilen und n Spalten. Der Begriff Matrix kennzeichnet also die Elemente und ihre Anordnung.

Matrizen werden durch unterstrichene Großbuchstaben, Vektoren durch unterstrichene Kleinbuchstaben (z.B. $\underline{A}$ oder $\underline{a}$) gekennzeichnet. Die Ordnung wird in Klammern oder als Indizes angegeben:

$$\underline{A}[m \times n] \qquad \text{oder} \qquad \underline{A}_{m\times n}$$

Die *Elemente* einer Matrix können reelle oder komplexe Zahlen, Funktionen oder auch selbst wieder Matrizen sein. Man bezeichnet die Elemente im Allgemeinen mit demselben Buchstaben wie die Matrix und gibt die Zeilen- und Spaltenzahl durch Indizes an ($\underline{A}_{ij}$ oder $\underline{a}_j$). Die Zeilen und Spalten werden immer fortlaufend nummeriert, in der Regel beginnt man mit eins. Damit stellt sich eine Matrix $\underline{A}_{m\times n}$ wie folgt dar:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

oder auch

$$\underline{A} = \left[A_{ij}\right]; \quad i = 1,2,\ ...,m; \quad j = 1,2,\ ....,n$$

Auf die Angabe der Ordnung wird verzichtet, wenn der Bereich der Indizes bekannt ist. Im Folgenden werden einige *spezielle Matrizen* erklärt:

- Die *Nullmatrix*

  $$\underline{A} = \left[A_{ij}\right]; \quad A_{ij} = 0 \qquad \textit{für alle} \quad i, j$$

- Die *quadratische Matrix*

  $\underline{A}_{n\times n}$ besitzt die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten.

- Die *symmetrische Matrix*

  ist eine spezielle quadratische Matrix mit

  $$\underline{A} = \left[A_{ij}\right]; \quad A_{ij} = A_{ji} \qquad \textit{für alle} \quad i \neq j$$

  Für die *schiefsymmetrische* Matrix gilt: $\underline{A} = \left[A_{ij}\right]; \quad A_{ij} = -A_{ji} \qquad \textit{für alle} \quad i \neq j$

- Die *Diagonalmatrix*

  Als *Hauptdiagonale* einer Matrix bezeichnet man die Elemente in der Diagonalen der rechteckigen Anordnung:

  $$\begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & & & x & \\ & & & & x \end{bmatrix}$$

  x: Elemente der Diagonalen

Eine Diagonalmatrix ist eine *quadratische Matrix*, bei der nur die Hauptdiagonalelemente ungleich Null sind:

$\underline{D} = \text{diag}\,\{d_i\}$

$D_{ii} = d_i$ für alle i und

$D_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

- Die *Einheitsmatrix*

  ist eine spezielle Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich Eins sind:

  $\underline{I} = [I_{ij}]$

  $I_{ii} = 1$ für alle i und

  $I_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

  Mit $\underline{I}_n$ bezeichnet man die Einheitsmatrix der Ordnung $[n \times n]$.

- Die *einzeilige (einspaltige) Matrix*

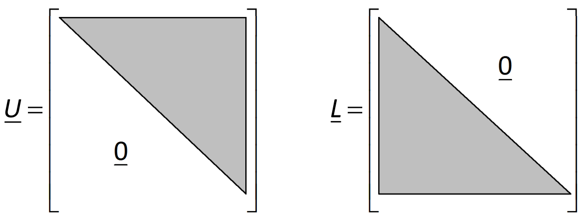
  ist eine Matrix, die nur aus einer Zeile (Spalte) besteht. Man bezeichnet sie auch als *Zeilenmatrix* (Spaltenmatrix).

- Die *obere (untere) Dreiecksmatrix*

  ist eine spezielle quadratische Matrix, bei der nur die Elemente oberhalb (unterhalb) der Hauptdiagonalen und die der Hauptdiagonalen ungleich Null sind:

  $\underline{U}$ = obere Dreiecksmatrix (Upper)

  $\underline{L}$ = untere Dreiecksmatrix (Lower)



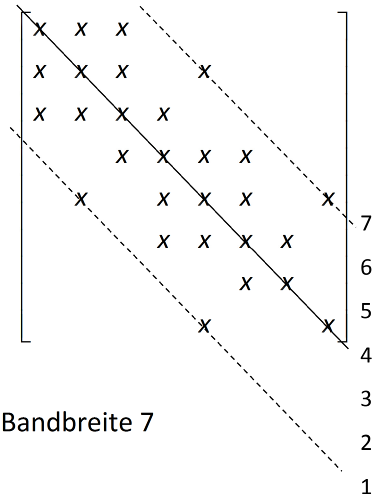
- Die *Permutationsmatrix (Vertauschungsmatrix)*

  ist eine Einheitsmatrix mit vertauschten Zeilen (oder Spalten).

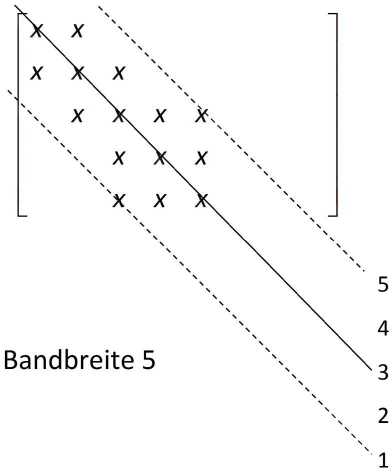
$$\underline{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{V}_4 = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Die *Bandmatrix:*

  Eine Matrix, bei der nur die Elemente in einer Umgebung der Hauptdiagonalen ungleich Null sind, bezeichnet man als Bandmatrix. Die Bandbreite einer Bandmatrix wird im Allgemeinen auf eine quadratische Matrix bezogen, bei rechteckigen bandförmigen Matrizen wird zu einer quadratischen Matrix "ergänzt".



Bandbreite 7



Bandbreite 5

- Die *Spur einer quadratischen Matrix*

  ist die Summe aller Hauptdiagonalelemente:

$$\underline{A} = \left[A_{ij}\right]; \quad i,j = 1,2,\ ...,n$$

$$sp(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

- Die *Hypermatrix („Übermatrix“)*

  ist eine Matrix, deren Elemente selbst Matrizen sind:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

- Die *Hyperdiagonalmatrix*

  ist eine Diagonalmatrix, deren Elemente selbst Matrizen sind

$$diag\left\{\underline{a}_i\right\} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & & & \\ & \underline{a}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{a}_n \end{bmatrix}$$

1.2 Rechenregeln für Matrizen

Vertauscht man bei einer Matrix die Zeilen mit den Spalten und umgekehrt, so erhält man aus einer $[m \times n]$ -Matrix $\underline{A}$ die *transponierte Matrix* $\underline{A}^T$ der Ordnung $[n \times \mathrm{m}]$:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

Das Transponieren entspricht einer *Spiegelung* bezüglich der Hauptdiagonalen. Es gilt:

$$\left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$$

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Im Folgenden wird eine Zusammenfassung der wichtigsten Rechenregeln gegeben:

- *Multiplikation mit einem Skalar*:

  Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes Element der Matrix mit diesem Skalar multipliziert:

$$\lambda \cdot \underline{A} \;=\; \underline{A} \cdot \lambda \;= \begin{bmatrix} \lambda \cdot A_{11} & \lambda \cdot A_{12} & \cdots & \lambda \cdot A_{1n} \\ \lambda \cdot A_{21} & \lambda \cdot A_{22} & \cdots & \lambda \cdot A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \lambda \cdot A_{m1} & \lambda \cdot A_{m2} & \cdots & \lambda \cdot A_{mn} \end{bmatrix}$$

- Die *Summe (Differenz) zweier [$m \times n$]-Matrizen*

  $\underline{A} = [A_{ij}]$ und $\underline{B} = [B_{ij}]$ ist definiert als die Summe (Differenz) der Elemente beider Matrizen. Es können nur Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl addiert (subtrahiert) werden.

  $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ entspricht $\left[C_{ij}\right] = \left[A_{ij} + B_{ij}\right]$

  $\underline{C} = \underline{A} - \underline{B}$ entspricht $\left[C_{ij}\right] = \left[A_{ij} - B_{ij}\right]$.

  Zwei Matrizen sind nur dann gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind.

  Beispiel:

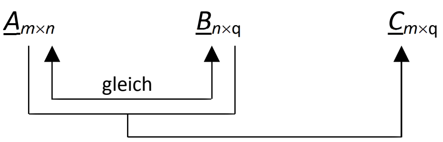
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+1 \\ 0+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Das *Produkt einer [$m \times n$]-Matrix $\underline{A}$ und einer [$n \times q$]-Matrix $\underline{B}$*

  Ist definiert als die [$m \times q$]-Matrix $\underline{C}$

  $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ mit $C_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu} \cdot B_{\nu k}$ $\quad i = 1,......,m;\; k = 1,......,q$

  Das Matrizenprodukt $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ist nur definiert, wenn die erste Matrix genauso viele Spalten besitzt wie die zweite Zeilen.



  Die Matrizenmultiplikation ist *assoziativ* $\quad \left(\underline{A} \cdot \underline{B}\right) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \left(\underline{B} \cdot \underline{C}\right) = \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C}$

distributiv $\underline{A}\cdot\left(\underline{B}+\underline{C}\right)=\underline{A}\cdot\underline{B}+\underline{A}\cdot\underline{C}$

aber *nicht kommutativ* $\underline{A}\cdot\underline{B}\neq\underline{B}\cdot\underline{A}$

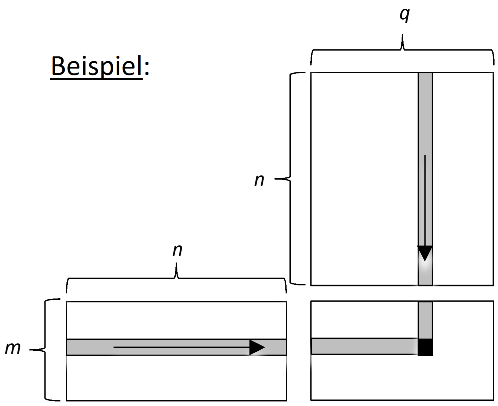
(vorausgesetzt, dass $\underline{A}\cdot\underline{B}$ und $\underline{B}\cdot\underline{A}$ überhaupt definiert sind).

Für die Einheitsmatrix gilt aber: $\underline{I}_n\cdot\underline{A}_{n\cdot m}=\underline{A}_{n\cdot m}\cdot\underline{I}_m$

Die Transponierte eines Matrizenproduktes ist: $\left(\underline{A}\cdot\underline{B}\cdot\underline{C}\cdots\underline{H}\right)^T=\underline{H}^T\cdots\underline{C}^T\cdot\underline{B}^T\cdot\underline{A}^T$

Matrizenprodukte können übersichtlich nach dem *Falkschen Schema* durchgeführt werden. Dies ist am Beispiel des Produktes $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{C}$ dargestellt.

Beispiel:



$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 1 & -1 & 1 & 0\\
 & & & & 0 & 2 & 0 & 1\\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1\\
 & & & & 0 & -1 & 0 & 0\\
\hline
1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 5\\
2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -3 & 3 & 0
\end{array}$$

Man schreibt hierzu die Matrizen in dem oben dargestellten Schema an. Für die Berechnung des Elementes C_{ij} ist die i-te Zeile und die j-te Spalte komponentenweise zu multiplizieren, und die Produkte sind zu addieren. Das Element C_{ij} steht im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile von $\underline{A}$ und der j-ten Spalte von $\underline{B}$.

- Das *Produkt einer Permutationsmatrix* $\underline{V}_n$ *mit einer* $[n\times m]$*-Matrix* $\underline{A}$

ergibt eine Zeilenvertauschung in $\underline{A}$: $\underline{V}_n\cdot\underline{A}=\underline{\tilde{A}}$ (Zeilentausch)

analog: $\underline{A}\cdot\underline{V}_m=\underline{\tilde{A}}$ (Spaltentausch)

Beispiel:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{43}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{43}\end{bmatrix}$$

1.3 Vektor, Vektornorm, Skalarprodukt und dyadisches Produkt

Eine einspaltige Matrix, deren Elemente reelle Zahlen sind, bezeichnet man als *Vektor* $\underline{a}_{n\times1}$. Die Komponenten a_i von $\underline{a}$ sind die Elemente der einspaltigen Matrix.

Eine einzeilige Matrix wird als *transponierter Vektor* definiert. Vektor $\underline{a}$ und der transponierte Vektor $\underline{a}^T$ werden wie nebenstehend dargestellt:

$$\underline{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\qquad\underline{a}^T=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}$$

Die Komponenten eines n-dimensionalen Vektors

$$\underline{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

sind die Koordinaten eines *Punktes* im *n*-dimensionalen euklidischen Raum. Der Nullpunkt ist der Koordinatenursprung.

Es gibt zwei Sonderfälle des Matrizenproduktes:

- Das *Skalarprodukt*:

  Das Produkt eines transponierten Vektors $\underline{a}^T_{1\times n}$ mit einem Vektor $\underline{b}_{n\times 1}$ ergibt eine skalare Größe:

  $$\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

  Das Skalarprodukt ist *kommutativ*:

  $$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}$$

  Zwei Vektoren sind orthogonal (senkr. zueinander), wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

  $$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = 0 \qquad (\underline{a} \perp \underline{b})$$

  Ist einer der Vektoren im Skalarprodukt variabel ($\underline{x}$), dann erhält man eine *Linearform*:

  $$l = \underline{a}^T \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$$

  Die Norm eines Vektors ist sein Betrag:

  $$\|\underline{a}\| = |\underline{a}| = \underline{a}^T \cdot \underline{a}$$

  Die Norm der Differenz zweier Vektoren ist der Abstand der beiden Punkte, welche durch die beiden Vektoren dargestellt werden:

  $$\|\underline{a} - \underline{b}\| = \sqrt{(\underline{a} - \underline{b})^T \cdot (\underline{a} - \underline{b})}$$

  Beispiel: Abstand *d* von zweidimensionale Vektoren

  $$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} \qquad \underline{c} = \underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} \qquad d = \sqrt{0^2 + (-1{,}5)^2} = \underline{\underline{1{,}5}}$$

- Das *dyadische Produkt*:

  Das Produkt eines Vektors $\underline{a}_{n\times 1}$ mit einem transponierten Vektor $\underline{b}^T_{n\times 1}$ ergibt eine $n\times m$-Matrix der Form:

  $$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \cdots & a_1 \cdot b_m \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \cdots & a_2 \cdot b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n \cdot b_1 & a_n \cdot b_2 & \cdots & a_n \cdot b_m \end{bmatrix}$$

  Das dyadische Produkt ist *nicht kommutativ*:

  $$\underline{a} \cdot \underline{b}^T \neq \underline{b} \cdot \underline{a}^T$$

1.4 Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren

Gegeben ist eine [$n \times m$]-Matrix $\underline{A}$; wir bezeichnen ihre Vektoren (= Spalten) mit $\underline{\alpha}_i$ für i = 1, 2, … , m. Das Produkt aus $\underline{A}$ und einem Vektor $\underline{u}_{m\times 1}$ ist ein Vektor:

$$\underline{b} = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \cdot \underline{\alpha}_\nu$$

Einen Ausdruck dieser Form bezeichnet man als *Linearkombination*: $\underline{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\underline{\alpha}_\nu$ von $\underline{A}$.

Die *m* Vektoren $\underline{\alpha}_1$, $\underline{\alpha}_2$, …….. $\underline{\alpha}_m$ sind linear abhängig, wenn:

$$u_1 \cdot \underline{a}_1 + u_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + u_m \cdot \underline{a}_m = \underline{0} \qquad \textit{für} \quad \underline{u} \neq \underline{0}$$

d.h., wenn es eine Linearkombination mit u_i; i = 1, 2, …… m gibt, die nicht sämtlich Null sind.

<u>Beispiel:</u> Die drei Vektoren

$$\underline{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sind linear abhängig, denn es ist $1{,}0 \cdot \underline{\alpha}_1 + 1{,}0 \cdot \underline{\alpha}_2 + 2{,}0 \cdot \underline{\alpha}_3 = \underline{0}$.

Sonderfälle:

m Vektoren sind *linear abhängig*, wenn einer der Vektoren $\underline{\alpha}_i$ der Nullvektor ist oder einer der Vektoren $\underline{\alpha}_i$ ein Vielfaches des anderen Vektors V $\underline{\alpha}_j$ ist.

Die Einheitsvektoren (jeder Dimension)

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind immer *linear unabhängig*.

1.5 Rang einer Matrix

Betrachtet man eine [$n \times m$]-Matrix $\underline{A}$ mit

ihren Vektoren $\underline{\alpha}_i$; i = 1, 2, …… m
und den transponierten Vektoren $\underline{\beta}_j^T$; j = 1, 2, …… n .

Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $\underline{\alpha}_i$ bezeichnen wir mit ρ_α, die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $\underline{\beta}_j$ mit ρ_β.

ρ_α ist der *Spaltenrang*, ρ_β der *Zeilenrang* von $\underline{A}$. Es zeigt sich, dass diese beiden Rangzahlen übereinstimmen, sodass man den *Rang* ρ einer [$n \times m$]-Matrix durch eine der beiden festlegen kann.

Eine Matrix $\underline{A}$, die nur linear unabhängige Vektoren $\underline{\alpha}_i$ und $\underline{\beta}_j$ hat, ist *regulär*. Hat eine Matrix $\underline{A}$ linear abhängige Vektoren $\underline{\alpha}_i$ oder $\underline{\beta}_j^T$, so ist sie *singulär*.

1.6 Determinanten

Determinanten sind nur für *quadratische Matrizen* definiert. Unter der Determinante einer Matrix $\underline{a}_{n\times n}$ versteht man die Zahl D, die sich nach der folgenden Formel berechnen lässt:

Entwicklungssatz: $$D = det\left(\underline{a}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} \cdot \underline{A}_{i\nu} \qquad \text{für jedes beliebige } i = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

$\underline{A}_{ij}$ sind die *Adjunkten* der Elemente a_{ij}: Es sind Unterdeterminanten, die man aus der gegebenen Determinante durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält:

$$\underline{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Streichen!

Die obige Gleichung ist der *Entwicklungssatz* für Determinanten. Die Berechnung einer Determinante nach obiger Gleichung ist äußerst aufwendig und sollte für $n > 4$ auf keinen Fall durchgeführt werden. Die *Determinante zweiter Ordnung* ($n = 2$) ergibt sich nach der Formel:

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Produkte in Richtung der Hauptdiagonalen sind positiv, senkrecht zur Hauptdiagonalen sind sie negativ. Für eine *Determinante dritter Ordnung* werden die ersten beiden Spalten nochmals hinter die letzte Spalte geschrieben. Die Produktbildung erfolgt wie bei der Determinante zweiter Ordnung:

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} = \; & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ & - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

Beispiele:

a) $$det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = \underline{2} \qquad det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = \underline{2}$$

b) Im Nachfolgenden wird die Determinante mit Hilfe des Entwicklungssatzes bestimmt.
Es wird $a_{i\nu} = a_{31}, a_{32}, a_{33}$ gewählt:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 - 1 - 9 = \underline{-10}$$

Der Entwicklungssatz ist besonders einfach bei Dreiecksmatrizen anzuwenden; es gilt: *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente*.

$$det(\underline{L}) = L_{11} \cdot L_{22} \cdot \dots \cdot L_{nn} \qquad L_{ij} = 0 \quad \text{für } j > i$$ (untere Dreiecksmatrix)

oder:

$$det(\underline{U}) = U_{11} \cdot U_{22} \cdot \dots \cdot U_{nn} \qquad U_{ij} = 0 \quad \text{für } j < i$$ (obere Dreiecksmatrix)

Die Determinante eines Matrizenproduktes ist gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen:

$$det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = det(\underline{A}) \cdot det(\underline{B})$$

Ist bei einer Matrix die Determinante Null, so bezeichnet man die Matrix als *singulär*; ist sie ungleich Null, so ist diese *regulär*.

1.7 Inverse und Halbinverse von Matrizen

Eine *quadratische Matrix* besitzt nur dann eine *inverse Matrix*, wenn ihre *Determinante ungleich Null* ist. Man bezeichnet die Inverse von $\underline{A}_{n \times n}$ mit $\underline{A}^{-1}$.

Es gilt:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{I} \qquad \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$$

Für das Rechnen mit Inversen gelten folgende Rechenregeln:

$$(\underline{A} \cdot \underline{B} \cdots \underline{H})^{-1} = \underline{H}^{-1} \cdot \dots \cdot \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$$

$$(\underline{A}^T)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^T$$

Eine $[n \times n]$-Matrix $\underline{A}$ bezeichnet man als *orthogonale* Matrix, wenn gilt:

$$\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T \qquad \text{d.h.} \quad \underline{A}^T \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{A}^T = \underline{I}$$

Beispiele für orthogonale Matrizen sind *Drehungsmatrizen (Transformationsmatrizen)* und *Permutationsmatrizen (Vertauschungsmatrizen)*.

Rechteckige Matrizen mit linear unabhängigen Zeilen bezeichnet man als *zeilenregulär*, solche mit unabhängigen Spalten als *spaltenregulär*.

Für *zeilenreguläre* $[n \times m]$-Matrizen gibt es *Rechtsinverse*, für *spaltenreguläre* $[n \times n]$-Matrizen *Linksinverse* mit folgenden Eigenschaften:

- $\underline{A}_{n \times m}$ zeilenregulär mit $m > n$.
  Es gibt Matrizen $\underline{B}_{0[m \times n]}$ (Rechtsinverse) derart, dass $\underline{A} \cdot \underline{B}_0 = \underline{I}_n$
- $\underline{A}_{n \times m}$ spaltenregulär mit $n > m$.
  Es gibt Matrizen $\underline{B}_{0[m \times n]}$ (Linksinverse) derart, dass $\underline{B}_0 \cdot \underline{A} = \underline{I}_m$
- Linksinverse und Rechtsinverse sind nicht eindeutig bestimmt.

Die Vieldeutigkeit der Links- und Rechtsinversen kann durch zusätzliche Bedingungen beseitigt werden. Bezüglich näherer Einzelheiten wird auf einschlägige Lehrbücher der linearen Algebra verwiesen (Halbinverse und Pseudoinverse).

1.8 Die Hadamard'sche Konditionszahl

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten zur Beurteilung der numerischen Stabilität bei der Berechnung der Inversen einer *quadratischen Matrix*.

Eine der bekanntesten Determinantenabschätzungen ist nach *Hadamard* benannt:

$$K_H = \frac{\left|det\left(\underline{A}\right)\right|}{Z}$$

$|\det(\underline{A})|$ ist der Betrag der Determinante der $[n \times n]$-Matrix $\underline{A}$, Z ist das Volumen des aus den Zeilenvektorbeträgen gebildeten Rechtskantes; man berechnet Z wie folgt:

Zeilenvektoren: $\underline{\beta}_i^T\,; \quad i = 1, \cdots, n$

Zeilenvektorbeträge: $a_i = \sqrt{\underline{\beta}_i \cdot \underline{\beta}_i^T} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \left(A_{i\nu}\right)^2}$

Volumen des Rechtskantes: $Z = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

Die Konditionszahl K_H liegt zwischen 0 (=singulär) und 1 (=optimale Kondition):

$$0 \le K_H \le 1$$

Jede orthogonale Matrix und jede Diagonalmatrix mit Diagonalelementen ungleich Null besitzt eine optimale Kondition.

1.9 Positiv definite Matrizen

Quadratische Matrizen werden als *positiv definit* bezeichnet, wenn gilt:

$$\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} > 0 \qquad \text{für alle } \underline{x} \neq \underline{0}.$$

Bei Gültigkeit der „größer-gleich"-Relation bezeichnet man $\underline{A}$ als *positiv semidefinit*. Analog wird *negativ definit* erklärt.

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot (\alpha + \beta) + 2 \cdot x_2^2 \,.$$

Es ist dies eine Parameterdarstellung für Kegelschnitte: Für $\alpha = \beta = 0$ erhält man z.B. die Ellipse:

$$x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 = const.$$

Es lässt sich zeigen, dass positiv definiten Matrizen $\underline{A}$ immer konvexe Funktionen $\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = const.$ zugeordnet sind, wie im vorliegenden Beispiel die Ellipse.

2.1 Allgemeines zu linearen Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{matrix} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + & \cdots & + A_{1m}\cdot x_m = b_1 \\ A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + & \cdots & + A_{2m}\cdot x_m = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{n1}\cdot x_1 + A_{n2}\cdot x_2 + & \cdots & + A_{nm}\cdot x_m = b_n \end{matrix}$$

kann mit

$$\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{b}$$

in Matrizenform dargestellt werden. Gegeben sind $\underline{A}_{n\times m}$ und $\underline{b}_{n\times 1}$, gesucht ist der Vektor $\underline{x}_{n\times 1}$, der das Gleichungssystem erfüllt.

Es gilt folgender wichtige Satz:

> Das Gleichungssystem $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A}_{n\times m}$ und $\underline{b}_{n\times 1}$, hat dann eine Lösung $\underline{x}_{n\times 1}$, wenn die Matrix $\underline{A}$ und die erweiterte $[n\times(m+1)]$-Matrix $[\underline{A}\ \underline{b}]$ beide den gleichen Rang r haben. Die Lösung ist eindeutig für $r = m$ ($\underline{A}$ quadratisch nichtsingulär). Für $r < m$ hängt die Lösung von $(m - r)$ Parametern ab; die Lösung ist $(m - r)$-fach vieldeutig.

Beide Fälle haben in den Matrizenmethoden eine zentrale Bedeutung.

2.2 Der Gauß'sche Algorithmus

Anwendungsbereich:

$$\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{b}\,,\quad A_{nxn} = \left[A_{ij}\right]$$

- Die Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ ist quadratisch und nichtsingulär.
- Insbesondere für Handrechnung geeignet.

Kurzbeschreibung:

$$\begin{matrix} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + & \cdots & + A_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + & \cdots & + A_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{n1}\cdot x_1 + A_{n2}\cdot x_2 + & \cdots & + A_{nn}\cdot x_n = b_n \end{matrix}$$

Durch Zeilentausch wird sichergestellt, dass A_{11} das betragsgrößte Element der ersten Spalte ist.

$A_{11} = 0$: Die Matrix $\underline{A}$ ist singulär. Da es keine eindeutige Lösung gibt, wird der Prozess abgebrochen.

$A_{11} \neq 0$: Die erste Zeile wird nacheinander mit Faktoren

$$C_{i1} = \frac{A_{i1}}{A_{11}}\,;\quad i = 2,\cdots,n$$

multipliziert und von den Zeilen i subtrahiert.

$$\frac{A_{21}}{A_{11}}\cdot\left(A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + \cdots + A_{1n}\cdot x_n\right) = \frac{A_{21}}{A_{11}}\cdot b_1$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{matrix} A_{21}\cdot x_1 + \dfrac{A_{21}\cdot A_{12}}{A_{11}}\cdot x_2 + \cdots + \dfrac{A_{21}\cdot A_{1n}}{A_{11}}\cdot x_n = \dfrac{A_{21}}{A_{11}}\cdot b_1 \\ A_{21}\cdot x_1 + \quad A_{22}\cdot x_2 + \cdots + \quad A_{2n}\cdot x_n = \quad b_2 \end{matrix}\right\} \ominus$$

neue 2. Zeile:

$$\left(A_{22}-\frac{A_{21}\cdot A_{12}}{A_{11}}\right)\cdot x_2+\cdots+\left(A_{2n}-\frac{A_{21}\cdot A_{1n}}{A_{11}}\right)\cdot x_n=b_2-\frac{A_{21}}{A_{11}}\cdot b_1$$

mit der Vereinbarung:

$$A_{22}'=\left(A_{22}-\frac{A_{21}\cdot A_{12}}{A_{11}}\right)\quad ;\quad A_{2n}'=\left(A_{2n}-\frac{A_{21}\cdot A_{1n}}{A_{11}}\right)$$

und $\quad b_2'=b_2-\frac{A_{21}}{A_{11}}\cdot b_1 \quad$ usw.

ist das Ergebnis der *ersten Elimination*

$$\begin{aligned}
A_{11}\cdot x_1+\ A_{12}\cdot x_2+\ &\cdots\ +A_{1n}\cdot x_n=b_1\\
A_{22}'\cdot x_2+\ &\cdots\ +A_{2n}'\cdot x_n=b_2'\\
\vdots\qquad &\qquad\ \vdots\qquad\quad \vdots\\
A_{n2}'\cdot x_2+\ &\cdots\ +A_{nn}'\cdot x_n=b_n'
\end{aligned}$$

Die *zweite Elimination* beginnt in der zweiten Zeile: Durch Zeilentausch wird sichergestellt, dass A_{22} das betragsgrößte Element der zweiten Spalte ist (mit Ausnahme des Elementes in der ersten Zeile).

A'_{22} = 0: Die Matrix $\underline{A}$ ist singulär. Da es keine eindeutige Lösung gibt, wird der Prozess abgebrochen.

$A'_{22} \neq 0$: Die zweite Zeile wird nacheinander mit Faktoren

$$C_{i2}=\frac{A_{i2}'}{A_{22}'}\ ;\quad i=3,\cdots,n$$

multipliziert und von den Zeilen *i* subtrahiert.

Das Ergebnis der *zweiten Elimination* lautet:

$$\begin{aligned}
A_{11}\cdot x_1+\ A_{12}\cdot x_2+A_{13}\cdot x_3+\ &\cdots\ +A_{1n}\cdot x_n=b_1\\
A_{22}'\cdot x_2+A_{23}'\cdot x_3+\ &\cdots\ +A_{2n}'\cdot x_n=b_2'\\
A_{33}''\cdot x_3+\ &\cdots\ +A_{3n}''\cdot x_n=b_3''\\
\vdots\qquad &\qquad\ \vdots\qquad\quad \vdots\\
A_{n3}''\cdot x_3+\ &\cdots\ +A_{nn}''\cdot x_n=b_n''
\end{aligned}$$

Die Elimination wird fortgesetzt, bis $\underline{A}$ in eine obere *Dreiecksmatrix* transformiert ist. Bezeichnet man die Elemente dieser oberen Dreiecksmatrix mit U_{ij} und die rechte Seite mit d_i:

$$\begin{aligned}
U_{11}\cdot x_1+U_{12}\cdot x_2+U_{13}\cdot x_3+\ &\cdots\ +U_{1n}\cdot x_n=d_1\\
U_{22}\cdot x_2+U_{23}\cdot x_3+\ &\cdots\ +U_{2n}\cdot x_n=d_2\\
U_{33}\cdot x_3+\ &\cdots\ +U_{3n}\cdot x_n=d_3\\
\vdots\qquad &\qquad\ \vdots\qquad\quad \vdots\\
&\qquad U_{nn}\cdot x_n=d_n
\end{aligned}$$

Die Lösung $\underline{x}$ berechnet man durch *„Rückwärtseinsetzen“*:

$$\begin{aligned}
x_n\ &=d_n\,/\,U_{nn}\\
x_{n-1}&=\left(d_{n-1}-U_{n-1,n}\cdot x_n\right)/\,U_{n-1,n-1}\\
&\ \vdots\\
x_1\ &=\left(d_1-\sum_{\nu=2}^{n}U_{1\nu}\cdot x_\nu\right)/\,U_{11}
\end{aligned}$$

Die Determinante erhält man aus:

$$det(\underline{U}) = U_{11} \cdot U_{22} \cdot \cdots \cdot U_{nn}$$

Anmerkung: Bei mehreren rechten Seiten wird die Elimination für alle rechten Seiten gleichzeitig ausgeführt.

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Die Eliminationsschritte (ES) werden zusammengefasst dargestellt:

1. ES:	(1)	$+8{,}00$	$+2{,}00$	$+0{,}00$	$+2{,}00$	$-10{,}00$		
	(2)	$+2{,}00$	$+8{,}00$	$+2{,}00$	$+0{,}00$	$+10{,}00$	-1/4	C_{i1}
	(3)	$+0{,}00$	$+2{,}00$	$+8{,}00$	$+2{,}00$	$-10{,}00$	0	
	(4)	$+2{,}00$	$+0{,}00$	$+2{,}00$	$+8{,}00$	$+10{,}00$	-1/4	
2. ES:	$(2')$	$+0{,}00$	$+7{,}50$	$+2{,}00$	$-0{,}50$	$+12{,}50$		
	$(3')$	$+0{,}00$	$+2{,}00$	$+8{,}00$	$+2{,}00$	$-10{,}00$	-8/30	C_{i2}
	$(4')$	$+0{,}00$	$-0{,}50$	$+2{,}00$	$+7{,}50$	$+12{,}50$	+2/30	
3. ES:	$(3'')$	$+0{,}00$	$+0{,}00$	$+7{,}47$	$+2{,}13$	$-13{,}33$		C_{i3}
	$(4'')$	$+0{,}00$	$+0{,}00$	$+2{,}13$	$+7{,}47$	$+13{,}33$	-2/7	
4. ES:	(4)	$+0{,}00$	$+0{,}00$	$+0{,}00$	$+6{,}86$	$+17{,}14$		

Ergebnis der *Elimination*:

$$\begin{bmatrix} +8{,}00 & +2{,}00 & +0{,}00 & +2{,}00 \\ 0 & +7{,}50 & +2{,}00 & -0{,}50 \\ 0 & 0 & +7{,}47 & +2{,}13 \\ 0 & 0 & 0 & +6{,}86 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10{,}00 \\ -12{,}50 \\ -10{,}33 \\ +17{,}14 \end{bmatrix}$$

Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ +2{,}5 \\ -2{,}5 \\ +2.5 \end{bmatrix}$$

Determinante:

$$det(A) = 8{,}0 \cdot 7{,}5 \cdot 7{,}47 \cdot 6{,}86 = \underline{3072}$$

2.3 Das Cholesky-Verfahren

Anwendungsbereich: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}\,,\quad \underline{A} = \left[A_{ij}\right] \quad$ *und* $\quad A_{ij} = A_{ji}$

- Die Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ ist quadratisch, symmetrisch und positiv definit.
- Das Verfahren ist besonders gut für die Programmierung geeignet.

Kurzbeschreibung:

Im ersten Rechenschritt wird die Dreieckszerlegung von $\underline{A}$ vorgenommen:

$$\underline{A} = \underline{L} \cdot \underline{L}^T$$

Wegen der Symmetrie von $\underline{A}$ ist die obere Dreiecksmatrix die Transponierte der unteren. Die Dreieckszerlegung erfolgt mit folgenden *Rekursionsformeln*:

$$L_{ii} = \left(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \cdot L_{jk}}{L_{jj}}$$

Im zweiten Rechenschritt erfolgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$\underline{L} \cdot \underline{L}^T \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

- *Vorwärtseinsetzen:* $\underline{L} \cdot \underline{y} = \underline{b}$

  Beginnend bei y_i ergibt sich: $\quad y_i = \frac{1}{L_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot y_j\right)$

- *Rückwärtseinsetzen:* $\underline{L}^T \cdot \underline{x} = \underline{y}$

  Beginnend bei x_n ergibt sich: $\quad x_i = \frac{1}{L_{ii}} \cdot \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} L_{ji} \cdot x_j\right)$

<u>Beispiel</u>: Es wird die *Dreieckszerlegung* der folgenden Matrix durchgeführt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ & 6 & 3 & 2 \\ & & 2 & 1 \\ sym. & & & 10 \end{bmatrix}$$

Die Zerlegung führt zu:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \underline{0} \\ L_{12} & L_{22} & & \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1{,}732 & & & \underline{0} \\ +0{,}000 & +2{,}449 & & \\ -0{,}577 & +1{,}225 & +0{,}439 & \\ +0{,}577 & +0{,}816 & +0{,}766 & +2{,}900 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Determinante: $\quad det\left(\underline{A}\right) = L_{11}^2 \cdot L_{22}^2 \cdot L_{33}^2 \cdots L_{nn}^2$

Dies folgt aus dem Entwicklungssatz für Determinanten: Der Wert der Determinante würde sich nicht ändern, wenn man eine der Dreiecksmatrizen so transformieren würde, dass die Diagonalelemente zu 1 würden. Diese Transformation würde die Diagonalelemente der anderen Dreiecksmatrix quadrieren.

2.4 Inversion einer symmetrischen, positiv definiten Matrix

Anwendungsbereich: $\underline{A}_{n\times n}$, symmetrisch, positiv definit
Sonderfall: bei vollbesetzter [$n\times n$]-Matrix und mehreren rechten Seiten ($\cong n$)

Im ersten Rechenschritt wird die untere Dreiecksmatrix L bestimmt (vgl. Cholesky, Kap. 2.3); im zweiten Rechenschritt die Kehrmatrix $\underline{L}^{-1}$. Die Berechnung der Elemente von $\underline{L}^{-1} \equiv \underline{l} = [l_{ij}]$ erfolgt nach:

Wegen der Symmetrie von $\underline{A}$ ist die obere Dreiecksmatrix

$$l_{ii} = \frac{1}{L_{ii}}$$

$$l_{ij} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} L_{ik} \cdot l_{kj}}{L_{ii}} \quad \textit{für } i > j \qquad \textit{bzw.} \quad l_{ij} = 0 \quad \textit{für } i < j$$

Im dritten Rechenschritt wird das Matrizenprodukt

$$\underline{A}^{-1} = \left(\underline{L}^{-1}\right)^T \cdot \underline{L}^{-1}$$

gebildet, um so die Kehrmatrix von $\underline{A}$ zu erhalten.

Anmerkungen:

- Eine Matrizeninversion sollte vermieden werden, wenn nur ein Gleichungssystem mit einigen wenigen rechten Seiten zu lösen ist.
- Die Inversen von Bandmatrizen sind i.A. voll besetzt; die Inversion erfordert nahezu genauso viele Rechenoperationen wie die Lösung für n rechte Seiten.