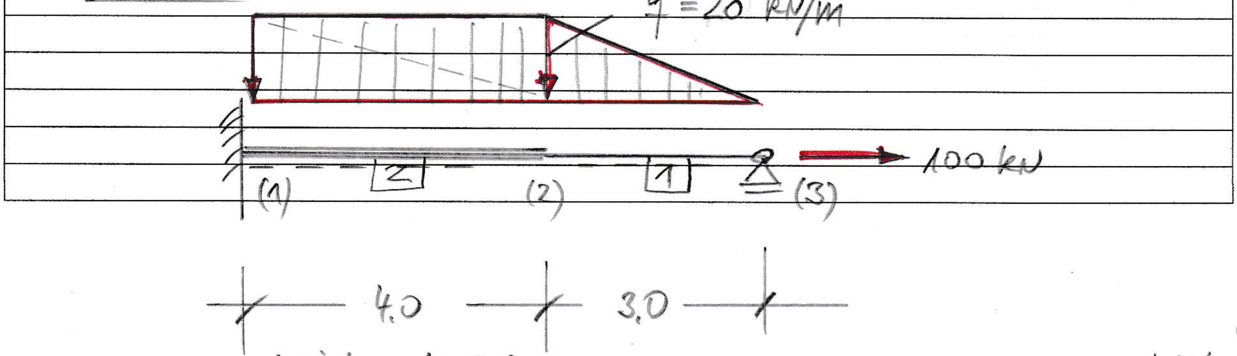
1. Beispiel zum WGV in Matrizendarstellung (WGVM)

— System



Inzidenztafel

i	a	e	l [m]	EA [kN]	EJ [kNm²]	β	q_a (kN/m)	q_e (kN/m)
1	2	3	3,0	60000	9000	0	20,0	0,0
2	1	2	4,0	80000	12000	0	20,0	20,0

Hinweis: alle Stäbe liegen horizontal → lokal = global
→ keine Transformation erf.

— Erstellen der Beziehungen zwischen Stabendverformungen und Stabendschnittgrößen für jeden Stab

$$\underline{s}^i = \underline{k}^i \cdot \underline{v}^i + \underline{s}^{i0}$$

$\boxed{\text{SCHRITT 1}}$

Stab 1 ($i = 1$):

Arbeitsblatt 3, rechte Sp.

$a = 2$; $e = 3$; dreiecksförmige Belastung

$$\begin{bmatrix} N_2^1 \\ V_2^1 \\ M_2^1 \\ \hline N_3^1 \\ V_3^1 \\ M_3^1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & -6000 & 0 & -4000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 12000 & 0 & 6000 & 6000 \\ \hline -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -4000 & 6000 & 0 & 4000 & 6000 \\ 0 & -6000 & 6000 & 0 & 6000 & 12000 \end{array}\right] * \begin{bmatrix} u_2^1 \\ w_2^1 \\ \varphi_2^1 \\ \hline u_3^1 \\ w_3^1 \\ \varphi_3^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ -21{,}0 \\ +9{,}0 \\ \hline 0{,}0 \\ -9{,}0 \\ -6{,}0 \end{bmatrix}$$

wegen $\beta = 0$ → $\overline{\underline{S}}^1 = \overline{\underline{K}}^1 \cdot \overline{\underline{V}}^1 + \overline{\underline{S}}^{10}$! lokal $\overset{!}{=}$ global

Stab 2 ($i=2$):
$a=1$; $e=2$; konst. Streckenlast ⟶ Arbeitsblatt 3, links

$$\begin{bmatrix} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ \hline N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 2250 & -4500 & 0 & -2250 & -4500 \\ 0 & -4500 & 12000 & 0 & 4500 & 6000 \\ \hline -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -2250 & 4500 & 0 & 2250 & 4500 \\ 0 & -4500 & 6000 & 0 & 4500 & 12000 \end{array}\right] * \begin{bmatrix} u_1^2 \\ w_1^2 \\ \varphi_1^2 \\ \hline u_2^2 \\ w_2^2 \\ \varphi_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -40{,}0 \\ +26{,}\overline{6} \\ \hline 0 \\ -40{,}0 \\ -26{,}\overline{6} \end{bmatrix}$$

wegen $\beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\bar{S}}^2 = \underline{\bar{K}}^2 \cdot \underline{\bar{V}}^2 + \underline{\bar{S}}^{20}$ (lokal = global)

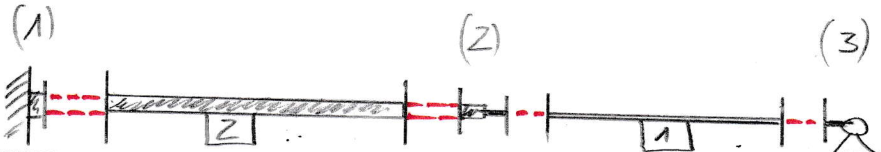
Aufteilung in Untermatrizen (nur für Stab 2 gezeigt):
vgl. oben: $i=2$; $a=1$; $e=2$

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_1^2 \\ \hline \underline{S}_2^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{11}^2 & \underline{K}_{12}^2 \\ \hline \underline{K}_{21}^2 & \underline{K}_{22}^2 \end{array}\right] * \begin{bmatrix} \underline{V}_1^2 \\ \hline \underline{V}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{S}_1^{20} \\ \hline \underline{S}_2^{20} \end{bmatrix}$$

Aufgabe für Excel ?
Version 1

– Zusammenstellen der Gleichgewichtsbedingungen (Zusammenbau zum Gesamtsystem)

a) Kontinuität (zwischen dem Knoten und den angrenzenden Stäben)



$\underline{V}_1 \overset{!}{=} \underline{\bar{V}}_1^2$ $\qquad$ $\underline{\bar{V}}_2^2 \overset{!}{=} \underline{V}_2 \overset{!}{=} \underline{\bar{V}}_2^1$ $\qquad$ $\underline{\bar{V}}_3^1 \overset{!}{=} \underline{V}_3$ $\qquad$ $\underline{V} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \underline{\bar{S}}_1^2 \\ \hline \underline{\bar{S}}_2^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\bar{K}}_{11}^2 & \underline{\bar{K}}_{12}^2 \\ \hline \underline{\bar{K}}_{21}^2 & \underline{\bar{K}}_{22}^2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \hline \underline{V}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{S}}_1^{20} \\ \hline \underline{\bar{S}}_2^{20} \end{bmatrix}$$

für Stab 2

$$\begin{bmatrix}\underline{\bar{S}}_2^1\\ \underline{\bar{S}}_3^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{\bar{K}}_{22}^1 & \underline{\bar{K}}_{23}^1\\ \underline{\bar{K}}_{32}^1 & \underline{\bar{K}}_{33}^1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{\bar{V}}_2\\ \underline{\bar{V}}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{\bar{S}}_2^{10}\\ \underline{\bar{S}}_3^{10}\end{bmatrix}$$ für Stab 1

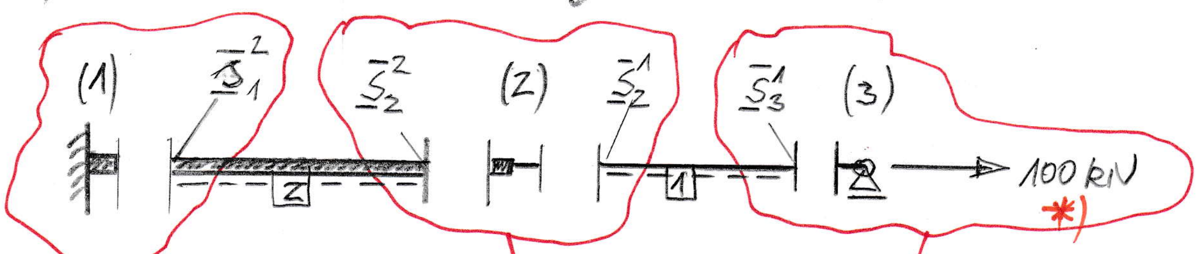
Damit sind alle Stabendschnittgrößen direkt abhängig von den Knotenverformungen.
Bei 3 Knoten und 3 Freiheitsgraden (im ebenen System) gibt es $3 * 3 = 9$ Knotenweggrößen im System!

$$\underline{\bar{V}}_G = \begin{bmatrix}\underline{\bar{V}}_1\\ \underline{\bar{V}}_2\\ \underline{\bar{V}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ \varphi_1\\ u_2\\ w_2\\ \varphi_2\\ u_3\\ w_3\\ \varphi_3\end{bmatrix}$$

gesamt!

Im Vektor $\underline{\bar{V}}_G$ sind alle möglichen noch unbekannten Knotenweggrößen enthalten.
Wir wissen schon, dass $V_1 = 0$; $v_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$ und $w_3 = 0$ sind!

b) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen



Gleichgew. am Knoten 1

Gleichgewicht am Kn. 2

Gleichgewicht am Kn. 3 (hier inkl. Knotenlast!)

je Knoten: 3 Gleichgewichtsbed.
$\Sigma \bar{K}_x = 0$; $\Sigma \bar{K}_z = 0$; $\Sigma \bar{M}_y = 0$

→ gesamt: $3 * 3 = 9$ Gleichgewichtsbeding.

$$\underline{0} + \underline{\bar{S}}_1^2 + \overset{\underline{0}}{\cancel{\underline{\bar{P}}_1}} \overset{!}{=} 0 \; ; \qquad \underline{\bar{S}}_2^2 + \underline{\bar{S}}_2^1 + \overset{\underline{0}}{\cancel{\underline{\bar{P}}_2}} \overset{!}{=} 0 \; ; \qquad \underline{\bar{S}}_3^1 + \underline{0} + \underline{\bar{P}}_3 \overset{!}{=} 0$$

hier! hier!

Knotenlasten *) $\begin{Bmatrix}-100\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$