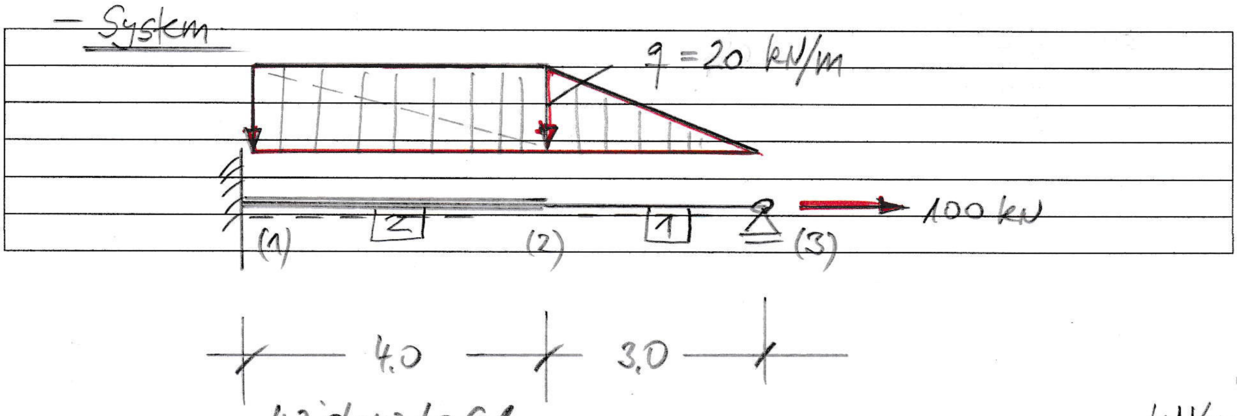
1. Beispiel zum WGV in Matrizendarstellung (WGVM)

– System



Inzidenztafel

i	a	e	l [m]	EA [kN]	EI [kNm²]	β	qa (kN/m)	qe (kN/m)
1	2	3	3,0	60000	9000	0	20,0	0,0
2	1	2	4,0	80000	12000	0	20,0	20,0

Hinweis: alle Stäbe liegen horizontal → lokal = global
→ keine Transformation erf.

– Erstellen der Beziehungen zwischen Stabendverformungen und Stabendschnittgrößen für jeden Stab

$$\underline{S}^i = \underline{K}^i \cdot \underline{V}^i + \underline{S}^{i0}$$

$\boxed{\text{SCHRITT 1}}$

Stab 1 (i = 1):

Arbeitsblatt 3, rechte Sp.

a = 2 ; e = 3 ; dreiecksförmige Belastung

$$\begin{bmatrix} N_2^1 \\ V_2^1 \\ M_2^1 \\ N_3^1 \\ V_3^1 \\ M_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & -6000 & 0 & -4000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 12000 & 0 & 6000 & 6000 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -4000 & 6000 & 0 & 4000 & 6000 \\ 0 & -6000 & 6000 & 0 & 6000 & 12000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_2^1 \\ w_2^1 \\ \varphi_2^1 \\ u_3^1 \\ w_3^1 \\ \varphi_3^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \\ -21,0 \\ +9,0 \\ 0,0 \\ -9,0 \\ -6,0 \end{bmatrix}$$

wegen β = 0 → $\underline{\bar{S}}^1 = \underline{\bar{K}}^1 \cdot \underline{\bar{V}}^1 + \underline{\bar{S}}^{10}$! lokal $\stackrel{!}{=}$ global

Stab 2 $(i=2)$:
$a = 1$; $e = 2$; konst. Streckenlast → Arbeitsblatt 3, links

$$
\left[\begin{array}{c} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ \hline N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\
0 & 2250 & -4500 & 0 & -2250 & -4500 \\
0 & -4500 & 12000 & 0 & 4500 & 6000 \\ \hline
-20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\
0 & -2250 & 4500 & 0 & 2250 & 4500 \\
0 & -4500 & 6000 & 0 & 4500 & 12000
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c} u_1^2 \\ w_1^2 \\ \varphi_1^2 \\ \hline u_2^2 \\ w_2^2 \\ \varphi_2^2 \end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c} 0 \\ -40{,}0 \\ +26{,}\bar{6} \\ \hline 0 \\ -40{,}0 \\ -26{,}\bar{6} \end{array}\right]
$$

wegen $\beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\bar{S}}^2 = \underline{\bar{K}}^2 \cdot \underline{\bar{V}}^2 + \underline{\bar{S}}^{20}$ (lokal = global)

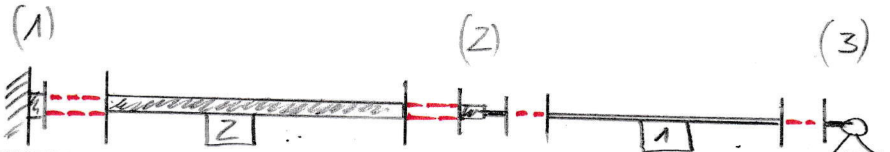
Aufteilung in Untermatrizen (nur für Stab 2 gezeigt):
vgl. oben: $i = 2$; $a = 1$; $e = 2$

$$
\left[\begin{array}{c} \underline{S}_1^2 \\ \hline \underline{S}_2^2 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{11}^2 & \underline{K}_{12}^2 \\ \hline \underline{K}_{21}^2 & \underline{K}_{22}^2 \end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c} \underline{V}_1^2 \\ \hline \underline{V}_2^2 \end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c} \underline{S}_1^{20} \\ \hline \underline{S}_2^{20} \end{array}\right]
$$

Aufgabe für Excel ? Version 1

– Zusammenstellen der Gleichgewichtsbedingungen (Zusammenbau zum Gesamtsystem)

a) Kontinuität (zwischen dem Knoten und den angrenzenden Stäben)



$\underline{\bar{V}}_1 \overset{!}{=} \underline{\bar{V}}_1^2$ $\qquad$ $\underline{\bar{V}}_2^2 \overset{!}{=} \underline{\bar{V}}_2 \overset{!}{=} \underline{\bar{V}}_2^1$ $\qquad$ $\underline{\bar{V}}_3^1 \overset{!}{=} \underline{\bar{V}}_3$ $\qquad$ $\underline{V} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{c} \underline{\bar{S}}_1^2 \\ \hline \underline{\bar{S}}_2^2 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c} \underline{\bar{K}}_{11}^2 & \underline{\bar{K}}_{12}^2 \\ \hline \underline{\bar{K}}_{21}^2 & \underline{\bar{K}}_{22}^2 \end{array}\right]
\cdot
\left[\begin{array}{c} \underline{\bar{V}}_1 \\ \hline \underline{\bar{V}}_2 \end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c} \underline{\bar{S}}_1^{20} \\ \hline \underline{\bar{S}}_2^{20} \end{array}\right]
$$

für Stab 2

$$\begin{bmatrix}\underline{\bar{S}}_2^1\\ \underline{\bar{S}}_3^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{\bar{K}}_{22}^1 & \underline{\bar{K}}_{23}^1\\ \underline{\bar{K}}_{32}^1 & \underline{\bar{K}}_{33}^1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{\bar{V}}_2\\ \underline{\bar{V}}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{\bar{S}}_2^{10}\\ \underline{\bar{S}}_3^{10}\end{bmatrix}$$ für Stab 1

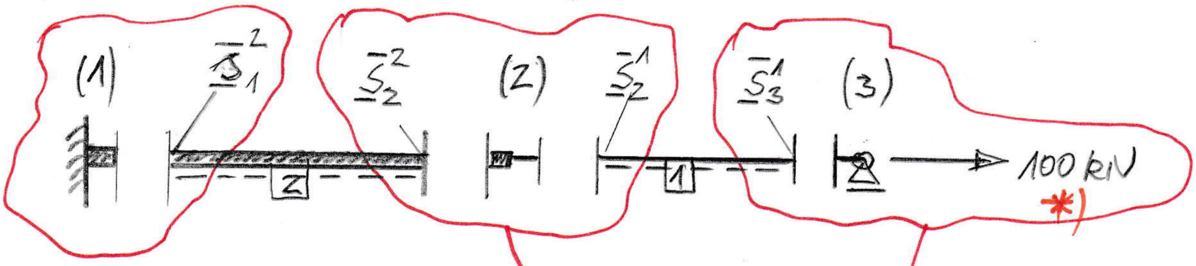
Damit sind alle Stabendschnittgrößen direkt abhängig von den Knotenverformungen.
Bei 3 Knoten und 3 Freiheitsgraden (im ebenen System) gibt es $3 * 3 = 9$ Knotenweggrößen im System!

$$\underline{\bar{V}}_G = \begin{bmatrix}\underline{\bar{V}}_1\\ \underline{\bar{V}}_2\\ \underline{\bar{V}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ \varphi_1\\ u_2\\ w_2\\ \varphi_2\\ u_3\\ w_3\\ \varphi_3\end{bmatrix}$$

gesamt!

Im Vektor $\underline{\bar{V}}_G$ sind alle möglichen noch unbekannten Knotenweggrößen enthalten.
Wir wissen schon, dass $u_1 = 0$; $v_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$ und $w_3 = 0$ sind!

b) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen



Gleichgew. am Knoten 1

Gleichgewicht am Kn. 2

Gleichgewicht am Kn. 3 (hier inkl. Knotenlast!)

je Knoten: 3 Gleichgewichtsbed.
$\Sigma \bar{K}_x = 0$; $\Sigma \bar{K}_z = 0$; $\Sigma \bar{M}_y = 0$

⇝ gesamt: $3 * 3 = 9$ Gleichgewichtsbeding.

$$\underline{0} + \underline{\bar{S}}_1^2 + \overset{0}{\cancel{\underline{\bar{p}}_1}} \overset{!}{=} 0 \; ; \quad \underline{\bar{S}}_2^2 + \underline{\bar{S}}_2^1 + \overset{0}{\cancel{\underline{\bar{p}}_2}} \overset{!}{=} 0 \; ; \quad \underline{\bar{S}}_3^1 + \underline{0} + \underline{\bar{p}}_3 \overset{!}{=} 0$$

hier! hier!

Knotenlasten *) $\begin{Bmatrix}-100\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$

am Knoten 1: (ohne Knotenlasten)

$$\underline{\bar{S}}_1^{2} \overset{!}{=} \underline{0} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{\bar{K}}_{11}^{2} \cdot \underline{\bar{V}}_1 + \underline{\bar{K}}_{12}^{2} \cdot \underline{\bar{V}}_2 + \underline{\bar{S}}_1^{20} \overset{!}{=} \underline{0}}$$

am Knoten 2: (ohne Knotenlasten)

$$\underline{\bar{S}}_2^{2} + \underline{\bar{S}}_2^{1} \overset{!}{=} 0$$

hier kommen zwei Stäbe zusamm.

$$\rightsquigarrow \underline{\bar{K}}_{21}^{2} \cdot \underline{\bar{V}}_1 + \underline{\bar{K}}_{22}^{2} \cdot \underline{\bar{V}}_2 + \underline{\bar{K}}_{22}^{1} \cdot \underline{\bar{V}}_2 + \underline{\bar{K}}_{23}^{1} \cdot \underline{\bar{V}}_3 + \underline{\bar{S}}_2^{20} + \underline{\bar{S}}_2^{10} = \underline{0}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\underline{\bar{K}}_{21}^{2} \cdot \underline{\bar{V}}_1 + \left(\underline{\bar{K}}_{22}^{2} + \underline{\bar{K}}_{22}^{1}\right) \cdot \underline{\bar{V}}_2 + \underline{\bar{K}}_{23}^{1} \cdot \underline{\bar{V}}_3 + \underline{\bar{S}}_2^{20} + \underline{\bar{S}}_2^{10} = \underline{0}}$$

am Knoten 3: (mit Knotenlasten!)

$$\underline{\bar{S}}_3^{1} + \underline{\bar{p}}_3 \overset{!}{=} \underline{0}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\underline{\bar{K}}_{32}^{1} \cdot \underline{\bar{V}}_2 + \underline{\bar{K}}_{33}^{1} \cdot \underline{\bar{V}}_3 + \underline{\bar{S}}_3^{10} + \underline{\bar{p}}_3 \overset{!}{=} \underline{0}}$$

$\rightsquigarrow$ Zusammenstell. aller Gleichgew.-bedingungen

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \\ \begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix} \\ \begin{matrix}7\\8\\9\end{matrix} \end{array}
\begin{bmatrix} \underline{\bar{K}}_{11}^{2} & \underline{\bar{K}}_{12}^{2} & \underline{0} \\ \underline{\bar{K}}_{21}^{2} & \underline{\bar{K}}_{22}^{2} + \underline{\bar{K}}_{22}^{1} & \underline{\bar{K}}_{23}^{1} \\ \underline{0} & \underline{\bar{K}}_{32}^{1} & \underline{\bar{K}}_{33}^{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\bar{V}}^{1} \\ \underline{\bar{V}}^{2} \\ \underline{\bar{V}}^{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{S}}_1^{20} \\ \underline{\bar{S}}_2^{20} + \underline{\bar{S}}_2^{10} \\ \underline{\bar{S}}_3^{10} + \underline{\bar{p}}_3 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underline{0}$$

$$\underline{\bar{K}}_G \cdot \underline{\bar{V}}_G - \underline{\bar{r}}_G \overset{!}{=} \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{\bar{K}}_G \cdot \underline{\bar{V}}_G = \underline{\bar{r}}_G}$$

<u>in Zahlen</u>:

$$\underline{\overline{K}}_G \cdot \overline{V}_G - \overline{F}_G = 0$$

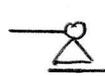
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 & & & \\
0 & 2250 & -4500 & 0 & -2250 & -4500 & & \underline{0} & \\
0 & -4500 & 12000 & 0 & 4500 & 6000 & & & \\
\hline
-20000 & 0 & 0 & 40000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\
0 & -2250 & 4500 & 0 & 6250 & -1500 & 0 & -4000 & -6000 \\
0 & -4500 & 6000 & 0 & -1500 & 24000 & 0 & 6000 & 6000 \\
\hline
 & & & -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\
 & \underline{0} & & 0 & -4000 & 6000 & 0 & 4000 & 6000 \\
 & & & 0 & -6000 & 6000 & 0 & 6000 & 12000
\end{array}\right] * \left[\begin{array}{c}
\overline{U}_1 \\ \overline{W}_1 \\ \overline{\varphi}_1 \\ \hline \overline{U}_2 \\ \overline{W}_2 \\ \overline{\varphi}_2 \\ \hline \overline{U}_3 \\ \overline{W}_3 \\ \overline{\varphi}_3
\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}
0{,}0 \\ -40{,}0 \\ +26{,}\overline{6} \\ \hline 0{,}0 \\ -61{,}0 \\ -17{,}\overline{6} \\ \hline -100 \\ -9{,}0 \\ -6{,}0
\end{array}\right] = \underline{0}$$

Gleichungssystem ist <u>nicht</u> lösbar! Wegen linear abhängiger Gleichungen
$\rightarrow$ singuläres Gleichungssystem!

$\downarrow$

<u>Lösung</u>: Einbau der Auflagerbedingungen $\rightarrow$ $\underbrace{\overline{U}_1 = 0\,;\ \overline{W}_1 = 0\,;\ \overline{\varphi}_1 = 0}_{(1)}\,;\ \underbrace{W_3 \overset{!}{=} 0}_{(3)}$

(1) 

 (3)

– Einbau der Randbedingungen **SCHRITT 3**

hier: vier Gleichungen werden durch vier triviale Gleichungen ersetzt

$1 \cdot u_1 \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad 1 \cdot w_1 \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad 1 \cdot \varphi_1 \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad 1 \cdot w_3 \overset{!}{=} 0$

⇝ gelöst wird ein Gleichungssystem mit insgesamt neun Gleichungen und neun Unbekannten. Vier davon werden zu Null „berechnet".

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & & \underline{0} & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 40000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\
 & \underline{0} & & 0 & 6250 & -1500 & 0 & 0 & -6000 \\
 & & & 0 & -1500 & 24000 & 0 & 0 & 6000 \\
\hline
 & & & -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\
 & \underline{0} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & -6000 & 6000 & 0 & 0 & 12000
\end{array}\right] * \left[\begin{array}{c}
\overline{U}_1 \\ \overline{W}_1 \\ \overline{\varphi}_1 \\ \hline \overline{U}_2 \\ \overline{W}_2 \\ \overline{\varphi}_2 \\ \hline \overline{U}_3 \\ \overline{W}_3 \\ \overline{\varphi}_3
\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0{,}0 \\ -61{,}0 \\ -17{,}\overline{6} \\ \hline -100 \\ 0 \\ -6{,}0
\end{array}\right] = \underline{0}$$

$$\underline{\overline{K}}_{G,RB} \cdot \underline{\overline{V}}_G - \underline{\overline{F}}_{G,RB} \overset{!}{=} \underline{0} \rightsquigarrow \text{lösbar!}$$

$$\boxed{\underline{\overline{K}}_{G,RB} \cdot \underline{\overline{V}}_G = \underline{\overline{F}}_{G,RB}}$$

– Lösen des Gleichungssystems. **SCHRITT 4**

$$\underline{\overline{K}}^{-1}_{G,RB} \cdot \underline{\overline{r}}_{G,RB} = \underline{\overline{V}}_G$$

gesamt — Randbedingungen

Falk'sches Schema

$\underline{\overline{r}}_{G,RB}$

0,00
0,00
0,00
0,00
61,00
17,67
100,00
0,00
6,00

$\underline{\overline{K}}^{-1}_{G,RB}$

1,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	1,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	1,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	5,00E-05	0,00E+00	0,00E+00	5,00E-05	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	3,18E-04	-2,27E-05	0,00E+00	0,00E+00	1,70E-04
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-2,27E-05	4,92E-05	0,00E+00	0,00E+00	-3,60E-05
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	5,00E-05	0,00E+00	0,00E+00	1,00E-04	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,70E-04	-3,60E-05	0,00E+00	0,00E+00	1,87E-04

$\underline{\overline{V}}_G$

0,00E+00	$\underline{\overline{V}}_1$
0,00E+00	
0,00E+00	
5,00E-03	$\underline{\overline{V}}_2$
2,00E-02	
-7,32E-04	
1,00E-02	$\underline{\overline{V}}_3$
0,00E+00	
1,09E-02	

– Nachlaufrechnung : **SCHRITT 5** ⤳ Einsetzen der jetzt bekannten Knotenweggrößen in SCHRITT 1 (für alle Stäbe)

$\underline{K}^1 \cdot \underline{V}^1 + \underline{S}^{10} = \underline{S}^1$

$\underline{K}^1$						$\underline{V}^1$	$\underline{S}^{10}$	$\underline{S}^1$		Baustatik
20000,000	0,000	0,000	-20000,000	0,000	0,000	5,000E-03	0,00	-100,000	-1	100,000
0,000	4000,000	-6000,000	0,000	-4000,000	-6000,000	2,003E-02	-21,00	-1,773	-1	1,773
0,000	-6000,000	12000,000	0,000	6000,000	6000,000	-7,323E-04	9,00	-54,682	-1	54,682
-20000,000	0,000	0,000	20000,000	0,000	0,000	1,000E-02	0,00	100,000	1	100,000
0,000	-4000,000	6000,000	0,000	4000,000	6000,000	0,000E+00	-9,00	-28,227	1	-28,227
0,000	-6000,000	6000,000	0,000	6000,000	12000,000	1,088E-02	-6,00	0,000	1	0,000

$\underline{K}^2 \cdot \underline{V}^2 + \underline{S}^{20} = \underline{S}^2$

$\underline{K}^2$						$\underline{V}^2$	$\underline{S}^{20}$	$\underline{S}^2$		Baustatik
20000,000	0,000	0,000	-20000,000	0,000	0,000	0,000E+00	0,00	-100,000	-1	100,000
0,000	2250,000	-4500,000	0,000	-2250,000	-4500,000	0,000E+00	-40,00	-81,773	-1	81,773
0,000	-4500,000	12000,000	0,000	4500,000	6000,000	0,000E+00	26,67	112,409	-1	-112,409
-20000,000	0,000	0,000	20000,000	0,000	0,000	5,000E-03	0,00	100,000	1	100,000
0,000	-2250,000	4500,000	0,000	2250,000	4500,000	2,003E-02	-40,00	1,773	1	1,773
0,000	-4500,000	6000,000	0,000	4500,000	12000,000	-7,323E-04	-26,67	54,682	1	54,682