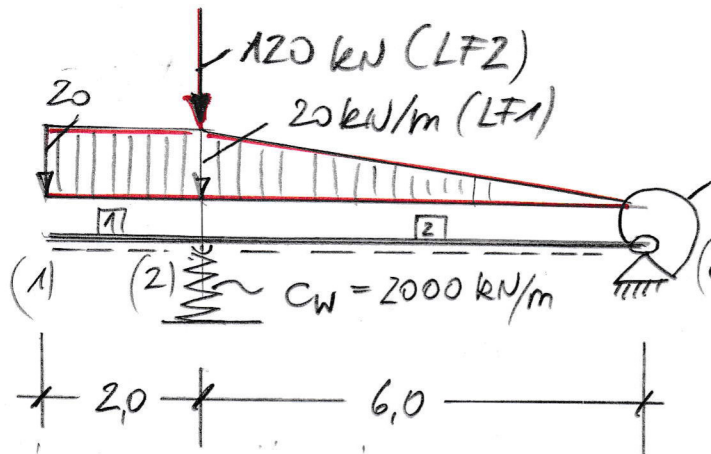


3. Beispiel zum Drehwinkelverfahren:

- System:



$$C_p = 4000 \text{ kNm/rad}$$

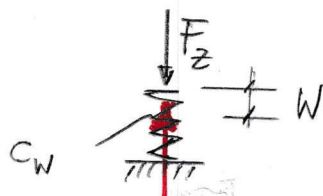
$$EA_1 = EA_2 = 10000 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = EI_1 = 10000 \text{ kNm}^2$$

NEU: elast. Auflagerbedingungen \rightarrow Weg- bzw. Drehfedern
 Einteillast auf Knoten
 mehrere Lastfälle

Wegfeder: (in horiz. oder vertikaler Richtung)

Federkonstante ist c_v oder c_w und gibt an, wieviel kN aufgebracht werden müssen, um einen Federweg von $\pm 1 \text{ m}$ zu erzielen; Dimension: $[\text{kN/m}]$



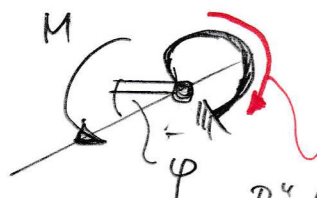
$$F_z = c_w \cdot w$$

$$= \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \text{m} = \text{kN}$$

Rückstellkraft wirkt immer dem Federweg entgegen!

Drehfeder: (um eine Achse)

Federkonstante ist c_p $[\text{kNm/rad}]$ und gibt an, welches Moment in kNm aufgebracht werden muss, um einen Drehwinkel von $\pm 1 \text{ rad}$ zu erzielen ($1 \text{ rad} = 57,295^\circ$)

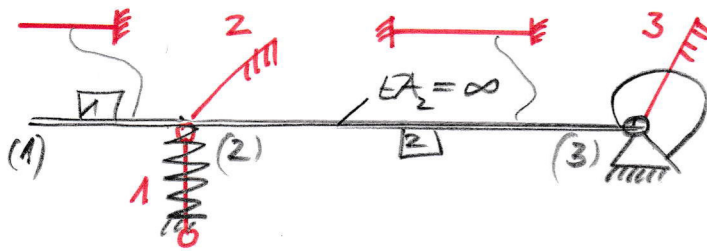


$$M = c_p \cdot \varphi$$

$$= \frac{\text{kNm}}{\text{rad}} \cdot \text{rad} = \text{kNm}$$

Rückstellmom. wirkt dem Drehwinkel entgegen!

- kinem. best. Hauptsystem:

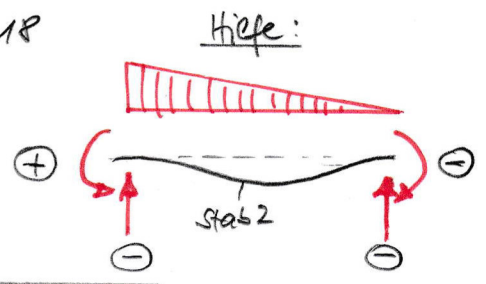
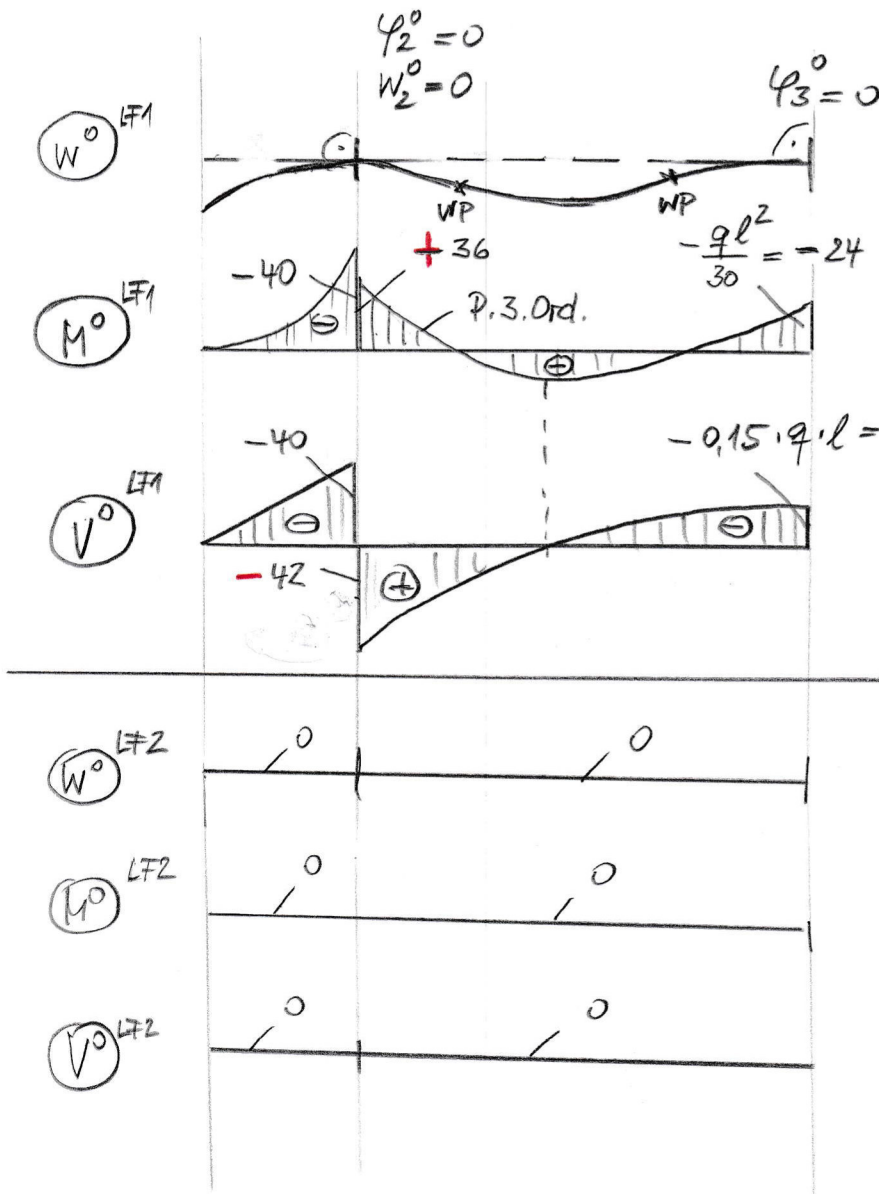


$m' = 3$

$$\left. \begin{array}{l} U_2 = 0 \quad (EA_2 = \infty) \\ W_2 \neq 0 \quad \leadsto \text{Wegfessel} \\ \varphi_2 \neq 0 \quad \leadsto \text{Drehfessel} \end{array} \right\} \text{2-Wert. Auflager}$$

$$\left. \begin{array}{l} U_3 = 0 \\ W_3 = 0 \\ \varphi_3 \neq 0 \quad \leadsto \text{Drehfessel} \end{array} \right\}$$

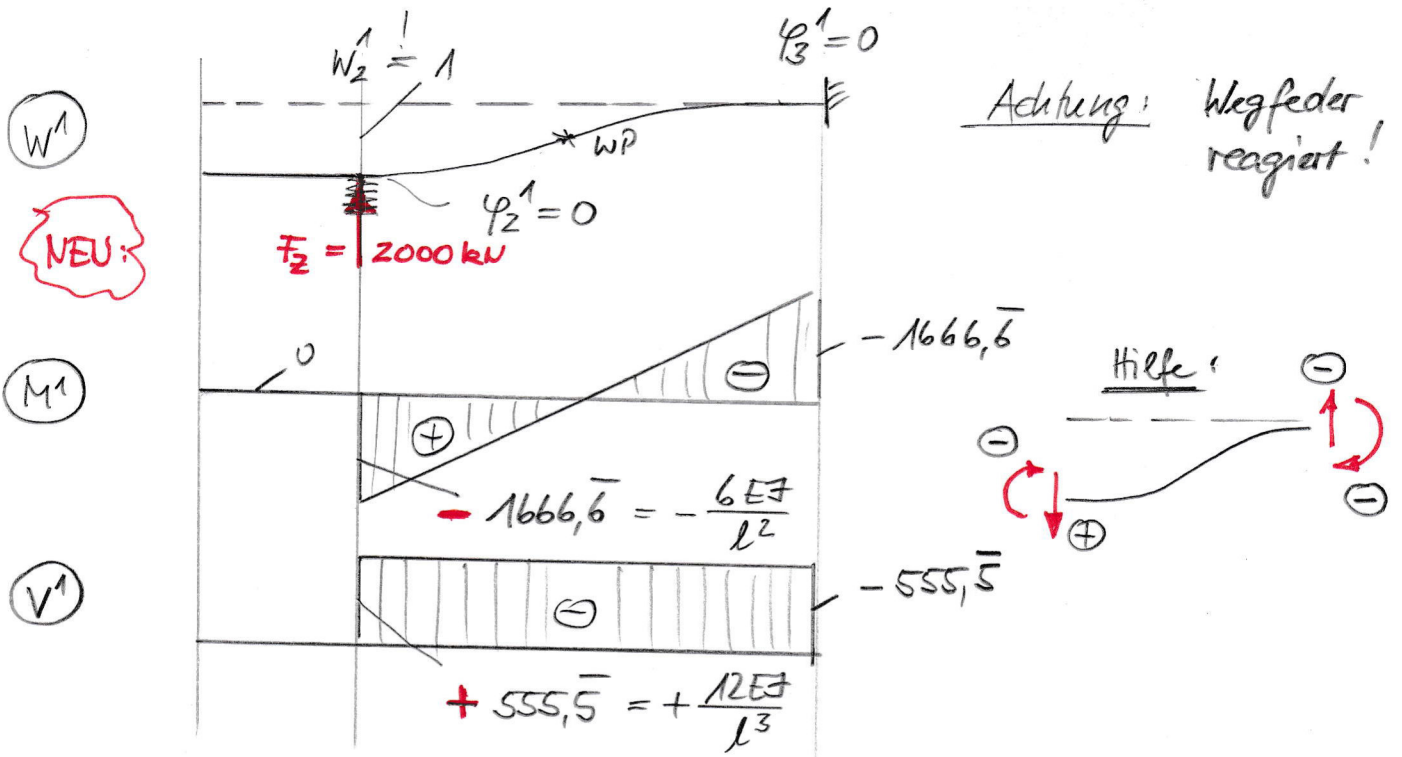
- Lastverformungszustände (je LF einer!)



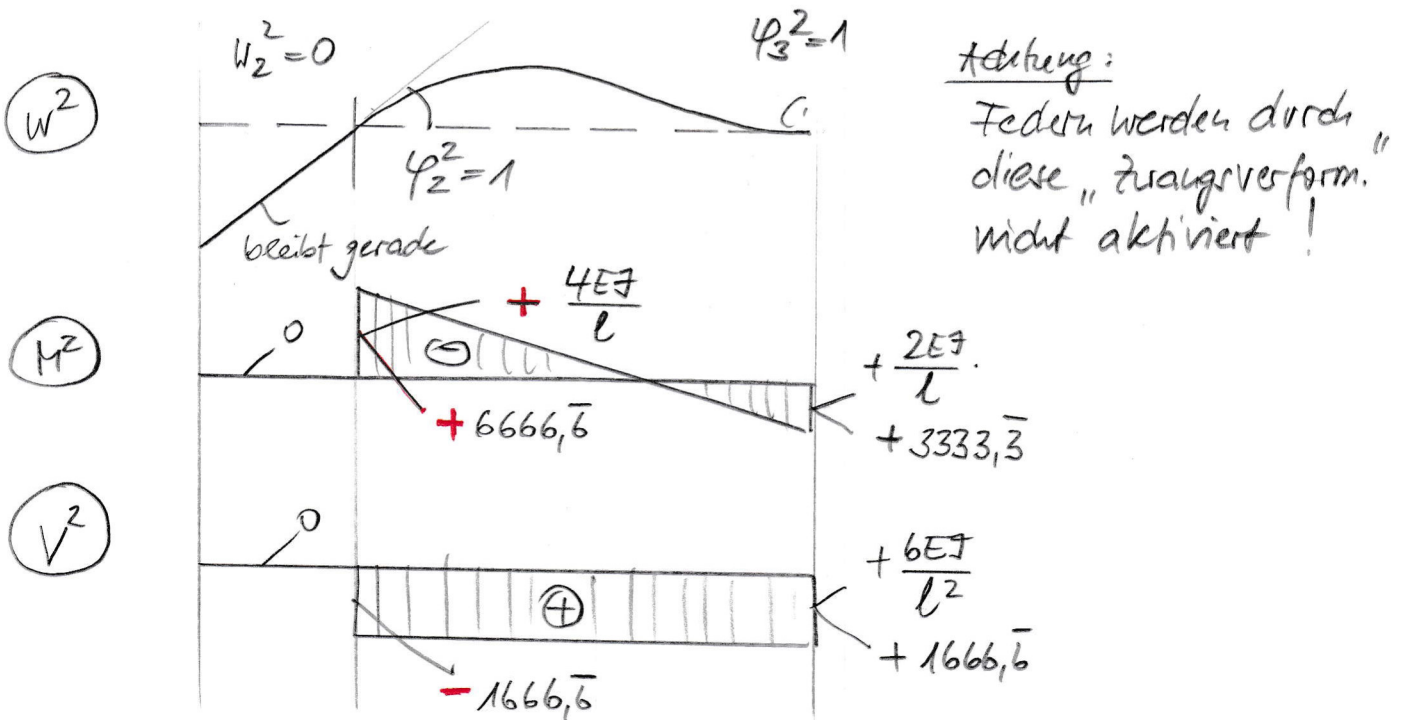
Knotenlast 120 kN
 auf Knoten 2
 wird von der Wegfessel 1
 aufgenommen!

\Downarrow
 " wird später bei der
 Gleichgewichtsbeding.
 $\sum K_{2,2} = 0$ berück-
 sichtigt !!!

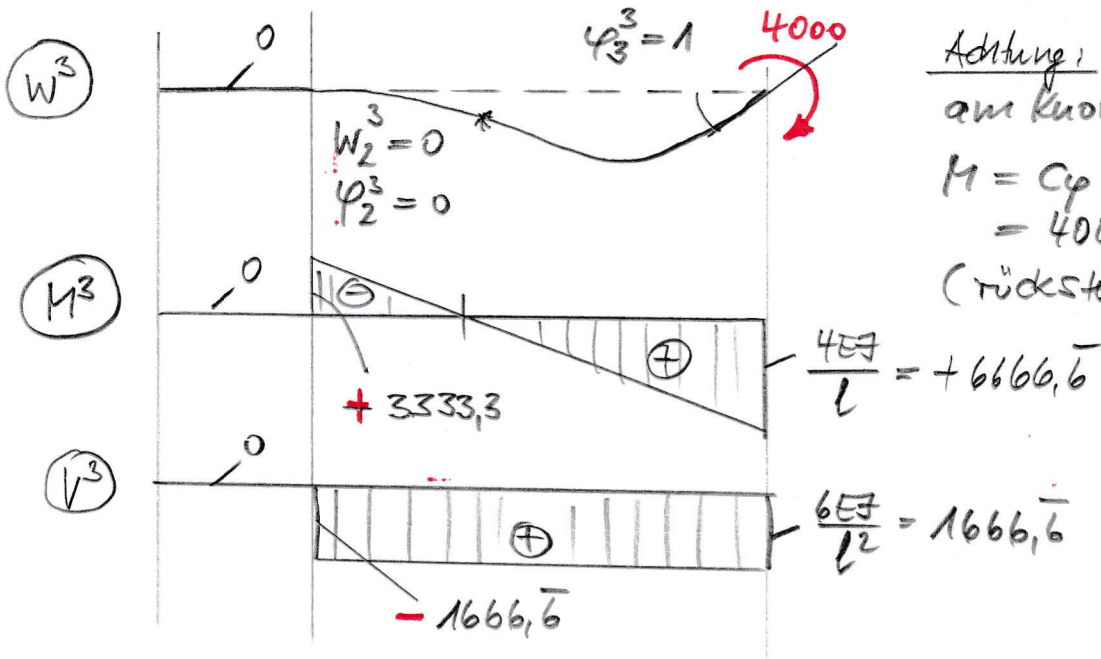
- Einheitsverformungszustand 1 (EVZ1): für alle LF gleich!



- Einheitsverf.-zustand 2 (EVZ2): für alle LF gleich!



- Einheitszustand EVZ3 : für alle LF gleich!



Achtung: Drehfeder am Knoten 3 reagiert!
 $M = c_{\varphi} \cdot 1$
 $= 4000 \cdot 1 = 4000 \text{ kNm}$
 (rückstellend!)

- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen :

Wichtig: Reihenfolge beachten!

1. Fessel = Wegfessel am Knoten 2 in z-Richtung

LF1:

$$\sum K_{z,2} \stackrel{!}{=} 0 : (-40 - 42) + y_1 (0 + 5555,5 + 2000) + y_2 (0 - 1666,6) + y_3 (0 - 1666,6) \stackrel{!}{=} 0$$

! siehe unten *

$$\leadsto 2555,5 \cdot y_1 - 1666,6 \cdot y_2 - 1666,6 \cdot y_3 = + 82$$

2. Fessel = Drehfessel am Knoten 2

$$\sum M_2 \stackrel{!}{=} 0 : (-40 + 36) + y_1 (0 - 1666,6) + y_2 (0 + 6666,6) + y_3 (0 + 3333,3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\leadsto -1666,6 \cdot y_1 + 6666,6 \cdot y_2 + 3333,3 \cdot y_3 = + 4$$

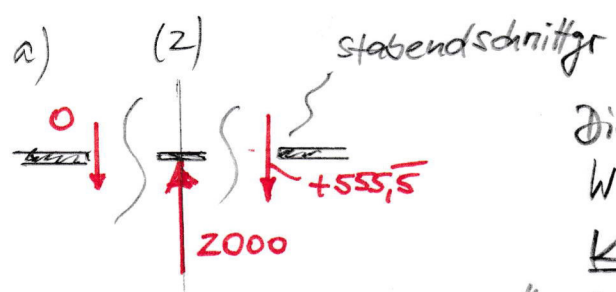
3. Fessel = Drehfessel am Knoten 3

$$\sum M_3 \stackrel{!}{=} 0 : (-24,0) + y_1 (-1666,6) + y_2 (3333,3) + y_3 (6666,6 + 4000) \stackrel{!}{=} 0$$

! siehe unten *

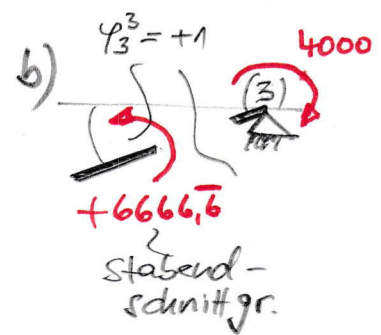
$$\leadsto -1666,6 \cdot y_1 + 3333,3 \cdot y_2 + 10666,6 \cdot y_3 = + 24$$

Erklärung *): Die Reaktionskräfte der Federn müssen bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt werden. Ihre Größe hängt vom Federweg bzw. von der Knotenverdrehung ab. Deshalb müssen sie bei den jeweiligen Einheitszuständen mit den Vorfaktoren y_i erfasst werden (hier y_1 für Wegfeder und y_3 für Drehfeder).
Warum aber mit „umgekehrten“ Vorzeichen?



Die Reaktionskraft der Wegfeder ist eine KNOTENLAST!

Beim „Aufsammeln“ der Stabendschnittgrößen muss diese Kraft auf das andere Schnittufer bezogen werden, was einen Vorzeichenwechsel zur Folge hat! $\rightarrow \dots 555,5 + 2000$



Das rückstell. Federmoment belastet den Knoten 3 \rightarrow KNOTENLAST!

Bei Bildung der Momentensumme, die sich auf das Stabende des Stabes 2 bezieht, muss deshalb ein Vorzeichenwechsel vorgenommen werden!

$\rightarrow \dots +6666,6 + 4000$

vollständiges Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 2555,5 & -1666,6 & -1666,6 \\ -1666,6 & 6666,6 & 3333,3 \\ -1666,6 & 3333,3 & 10666,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82,0 \\ 4,0 \\ 24,0 \end{Bmatrix} \quad \text{LF1}$$

Kontrolle : $\#0$ -Elemente sind positiv ✓
 Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch ✓
und : Die Federsteifigkeiten gehen auf der Hauptdiagonale mit pos. Werten ein
 (logisch: Federn machen das System steifer!)

Das Lösen des Gleichungssystem erfolgt mit Excel,
 ebenso die Nachlaufrechnung (Superposition)
aber : zunächst wird noch der 2. Lastfall bearbeitet :

LF2:

$\sum K_{z,2} \stackrel{!}{=} 0$: *Knotenlast wird mit „umgekehrten“ Vorzeichen in die Gleichgewichtsbed. eingefügt!*
 $(-120) + y_1(\dots) + y_2(\dots) + y_3(\dots) \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow 2555,5 \cdot y_1 - 1666,6 \cdot y_2 - 1666,6 \cdot y_3 = +120$

$\sum M_2 \stackrel{!}{=} 0$:

$-1666,6 \cdot y_1 + 6666,6 \cdot y_2 + 3333,3 \cdot y_3 = 0$

$\sum M_3 \stackrel{!}{=} 0$

$-1666,6 \cdot y_1 + 3333,3 \cdot y_2 + 10666,6 \cdot y_3 = 0$

Gelöst wird das Gleichungssystem mit einer
zweispaltigen Lastmatrix auf der rechten Seite

	S.O.	

LF1	LF2
y_1	y_1
y_2	y_2
y_3	y_3

 $=$

LF1	LF2
82	120
4	0
24	0

\rightarrow führt auf zwei Lösungsvektoren

Fortsetzung: 3. Beispiel zum Drehwinkelverfahren

Lösung des Gleichungssystems $[K] \cdot [y] = [r]$

$[K]$ = Steifigkeitsmatrix (pos. Definit + symmetrisch)

2555,556	-1666,667	-1666,667
-1666,667	6666,667	3333,333
-1666,667	3333,333	10666,667

LF1 LF2

$[r]$ = Lastvektor (recht Seite)

82,000	120,000
4,000	0,000
24,000	0,000

$[K]^{-1}$ = Inverse Steifigkeitsmatrix

4,850E-04	9,880E-05	4,491E-05
9,880E-05	1,979E-04	-4,641E-05
4,491E-05	-4,641E-05	1,153E-04

$[y]$ = Lösungsvektor

0,041246	0,058204
0,007780	0,011856
0,006263	0,005389

entspricht:

w_2
ϕ_2
ϕ_3

Nachlaufrechnung (Superposition)

mit Hilfe einer einfachen Matrizenmultiplikation

Stabend- (Vorzeichen nach WGV)
schnittgrößen

	am LVZ	am EVZ1	am EVZ2	am EVZ3
$M_{2,links}$	-40,000	0,000	0,000	0,000
$M_{2,rechts}$	36,000	-1666,667	6666,667	3333,333
$M_{3,links}$	-24,000	-1666,667	3333,333	6666,667
$V_{2,links}$	-40,000	0,000	0,000	0,000
$V_{2,rechts}$	-42,000	555,556	-1666,667	-1666,667
$V_{3,links}$	-18,000	-555,556	1666,667	1666,667

1,000000
0,041246
0,007780
0,006263

LF1

nach Baustatik	
1	-40,000
-1	-40,000
1	-25,054

-40,000
40,000
-25,054

-40,000
-42,491
-17,509

1	-40,000
-1	42,491
1	-17,509

Federkräfte:

2000,000	0	0
0	0,000	0
0	0	4000,000

82,491
0,000
25,054

-1	-82,491
-1	0,000
-1	-25,054

Gleichgewicht an den Orten der Fesseln = OK

	am LVZ	am EVZ1	am EVZ2	am EVZ3
$M_{2,links}$	0,000	0,000	0,000	0,000
$M_{2,rechts}$	0,000	-1666,667	6666,667	3333,333
$M_{3,links}$	0,000	-1666,667	3333,333	6666,667
$V_{2,links}$	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{2,rechts}$	0,000	555,556	-1666,667	-1666,667
$V_{3,links}$	0,000	-555,556	1666,667	1666,667

1,000000
0,058204
0,011856
0,005389

nach Baustatik	
1	0,000
-1	0,000
1	-21,557

0,000
0,000
-21,557

0,000
3,593
-3,593

1	0,000
-1	-3,593
1	-3,593

Federkräfte:

2000,000	0	0
0	0,000	0
0	0	4000,000

116,407
0,000
21,557

-1	-116,407
-1	0,000
-1	-21,557

Gleichgewicht an den Orten der Fesseln = OK

- Ergebnisse :

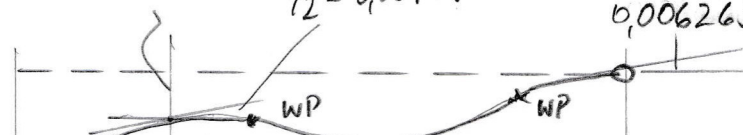
L#1

$w_2 = 0,041246$ (Federweg)

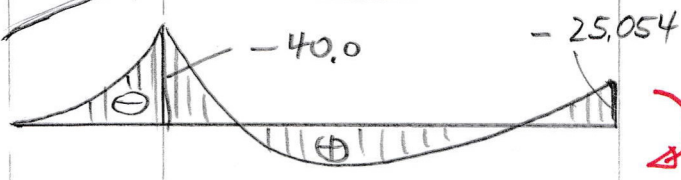
$\varphi_2 = 0,00778$

$0,006263$ rad (Drehfederwinkel)

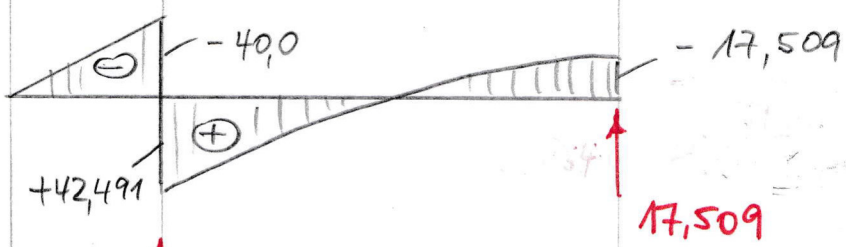
(W)



(M)



(V)



$F_w = \uparrow 82,491 \hat{=} 2000 \cdot 0,041246 \checkmark$

L#2

$w_2 = 0,058204$

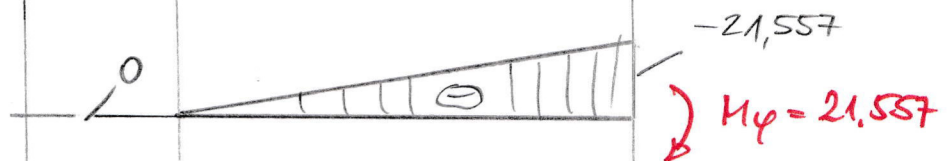
$\varphi_2 = 0,011856$ rad

$\varphi_3 = 0,005389$ rad

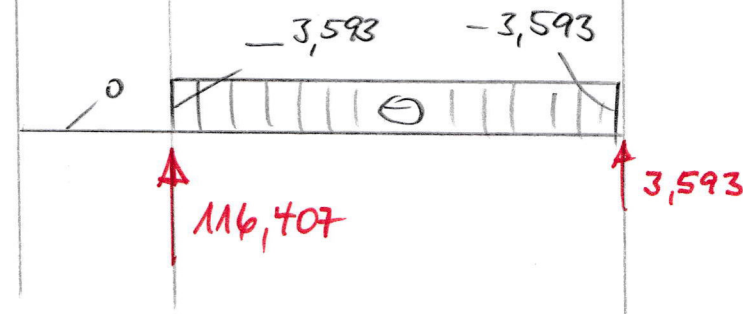
(W)



(M)



(V)



$$\left. \begin{array}{l} \downarrow 120 \text{ (Last)} \\ \downarrow -3,593 \\ \uparrow 116,407 \end{array} \right\} \sum V \stackrel{!}{=} 0 \checkmark$$