

### 3 Bemessung auf Biegung

#### 3.1 Schnittgrößen

##### 3.1.1 Allgemeine Grundlagen

Querschnitte von Tragwerken oder Tragwerksteilen müssen für die ungünstigsten Beanspruchungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit bemessen werden. Die ungünstigsten Beanspruchungen eines Querschnitts sind von der Größe und der Verteilung der Einwirkungen abhängig. Zur Ermittlung der maßgebenden Einwirkung ist eine ausreichende Anzahl von Lastfällen (Kombinationen von Einwirkungsgrößen und ihre Verteilungsmöglichkeiten) zu untersuchen.

Für die Ermittlung der Schnittgrößen werden sowohl bei der Geometrie als auch bei dem Tragverhalten Vereinfachungen (Idealisierungen) vorgenommen:

##### Idealisierung der Geometrie

- Stabförmige Bauteile
- Ebene Flächentragwerke
- Schalen
- Dreidimensionale Tragwerke

##### Idealisierung des Trag- und Materialverhaltens

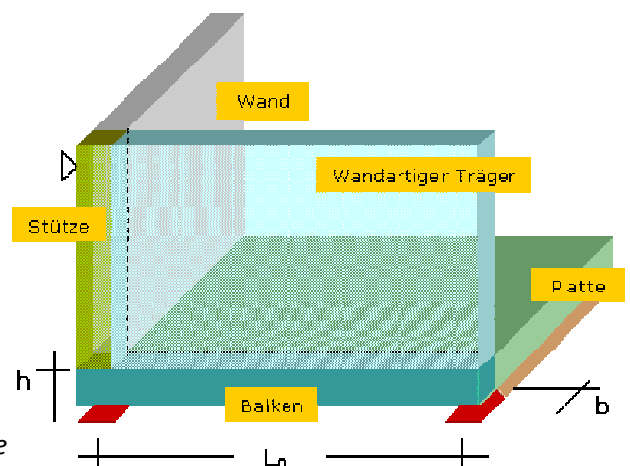
- Elastisches Verhalten
- Elastisches Verhalten mit begrenzter Umlagerung
- Plastisches Verhalten und Anwendung von Stabwerkmodellen
- Nichtlineares Verhalten

Alle Berechnungsverfahren der Schnittgrößenermittlung müssen sicherstellen, dass die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Das Gleichgewicht wird im Allgemeinen am nicht verformten Tragwerk nachgewiesen (Theorie I. Ordnung). Wenn jedoch die Auslenkung des Systems zu einem wesentlichen Anstieg der Schnittgrößen führt, muss der Gleichgewichtszustand am verformten Tragwerk nachgewiesen werden (Theorie II. Ordnung). Bei Bauteilen des üblichen Hochbaus dürfen die Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung vernachlässigt werden, wenn sie die Tragfähigkeit um weniger als 10 % verringern. Außerdem darf der Einfluss auf die Schnittgrößen der durch Quer- und Längskräfte entstehenden Verformungen vernachlässigt werden, sofern der Einfluss weniger als 10 % ausmacht.

Die Tragelemente werden nach ihrer Eigenschaft und Funktion eingeteilt (vgl. Bild 3.1):

- |                               |              |
|-------------------------------|--------------|
| • Balken, Platte              | $l/h \geq 3$ |
| • Scheibe, wandartiger Träger | $l/h < 3$    |
| • Platte                      | $b/h \geq 5$ |
| • Balken                      | $b/h < 5$    |
| • Stütze                      | $b/h < 4$    |
| • Wände                       | $b/h \geq 4$ |

mit  $l$  = Stützweite;  
 $h$  = Bauhöhe;  
 $b$  = Querschnittsbreite  
( $b \geq h$  bei Stützen und Wänden)



**Bild 3.1:** Schematische Darstellung der Tragelemente

Platten dürfen einachsig gerechnet werden, wenn

- die Belastung ist gleichmäßig verteilt ist und
- das Stützweitenverhältnis  $l_{max}/l_{min} \geq 2$  oder
- bei zwei freien ungelagerten, gegenüberliegenden und parallelen Rändern

Für die Ermittlung der Schnittgrößen sind gemäß DIN EN 1992-1-1 (EC2) vier Arten der Berechnungsverfahren zugelassen, die sich im Wesentlichen durch den Grad der Ausnutzung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens des Verbundbaustoffes Stahlbeton unterscheiden:

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| • Linear-elastische Berechnung                                       | DIN EN 1992-1-1, Kap. 5.4 |
| • Linear-elastische Berechnung mit begrenzter Momentenumlagerung     | Kap. 5.5                  |
| • Verfahren der Plastizitätstheorie, einschließlich Stabwerksmodelle | Kap. 5.6                  |
| • Nichtlineare Berechnungsverfahren                                  | Kap. 5.7                  |

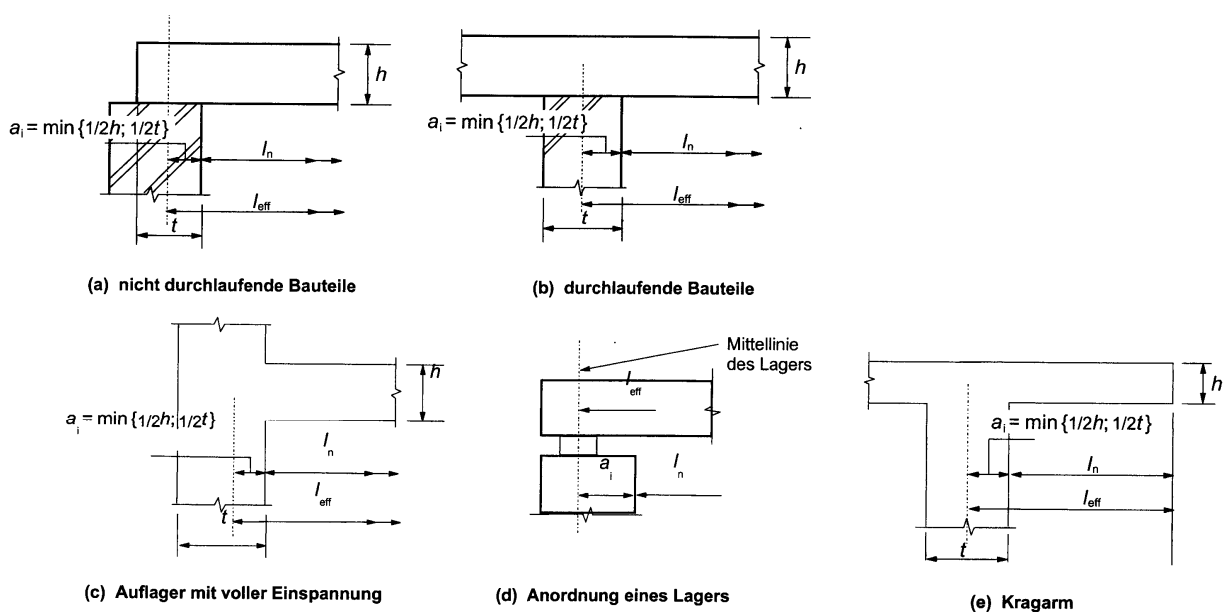
Die Berechnungsverfahren werden in den Kapiteln 3.1.5 bis 3.1.7 näher erläutert. Im Rahmen dieser Vorlesung wird bei Beispielen nur das erstgenannte Verfahren behandelt.

### 3.1.2 Stützweiten

Um die Bauwerksgeometrie in statische Systeme umsetzen zu können, ist es für die einzelnen Bauteile von entscheidender Wichtigkeit, die richtige Stützweite anzusetzen. Die Stützweite ergibt sich gemäß DIN EN 1992-1-1, Kap. 5.3.2.2 aus dem lichten Abstand zwischen den Vorderkanten der Auflager und dem jeweiligen Abstand zwischen der Auflagervorderkante und den rechnerischen Auflagerlinien.

$$l_{eff} = l_n + a_1 + a_2$$

Die Werte für  $a_1$  und  $a_2$  sind von den Auflager- und Einspannbedingungen des Bauteils abhängig.

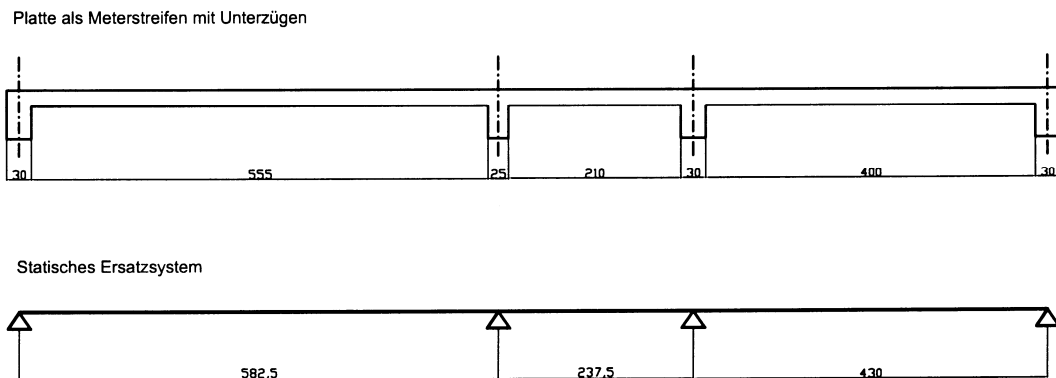


**Bild 3.2:** Effektive Stützweite  $l_{eff}$  für verschiedene Auflagerbedingungen

**Beispiel 3.1:** Einachsig gespannte Platte über drei Felder

Gegeben: Eine einachsig gespannte Platte ist auf Stahlbetonbalken gelagert. Da die Randträger sich verdrehen können, ist das Auflager in Balkenmitte anzusetzen.

Gesucht: Effektive Spannweiten



Die effektive Stützweite für das linke Feld errechnet sich zu  $l_{eff,1} = 0,15 + 5,55 + 0,125 = \underline{5,825 \text{ m}}$ . Im mittleren Feld ergibt sich  $l_{eff,2} = 0,125 + 2,10 + 0,15 = \underline{2,375 \text{ m}}$ , im rechten Feld  $l_{eff,3} = 0,15 + 4,00 + 0,15 = \underline{4,30 \text{ m}}$ .

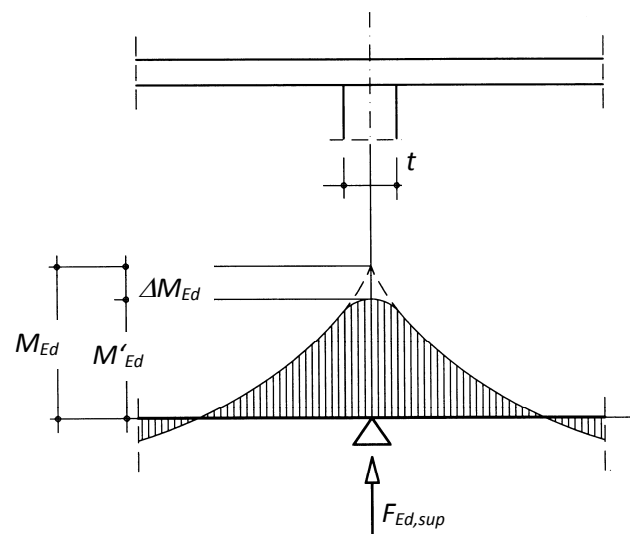
**3.1.3 Momentenausrundung**

Bei der Ermittlung der Biegemomente über einer Unterstüztung (negative Stützmomente über einem Mittelaufleger) darf das Stützmoment über die Breite der Unterstüztung ausgerundet werden. Das maßgebende Bemessungsmoment ist damit – absolut betrachtet – kleiner als das errechnete Moment in der rechnerischen Auflagerachse. Hierbei werden zwei Fälle unterschieden.

a) Nicht biegesteifer Anschluss, z.B. bei Auflagerung auf Mauerwerk

maßgeb. Bemessungsmoment (in Auflagerachse):

$$|M'_{Ed}| = |M_{Ed}| - |F_{Ed,sup}| \cdot \frac{t}{8}$$



**Bild 3.3:** Momentenausrundung bei frei drehbarer Lagerung

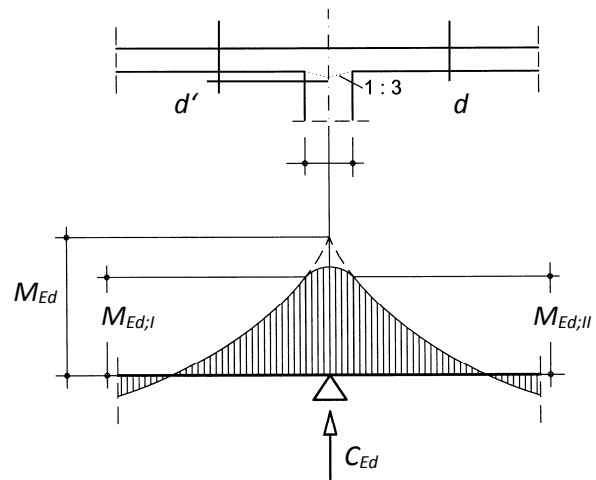
b) Biegesteifer Anschluss, z.B. bei monolithischem Anschluss zwischen Decke und Unterzug

maßgebende. Bemessungsmomente (am Anschnitt):

$$|M_{Ed,I}| = |M_{Ed}| - |V_{Ed,links}| \cdot \frac{t}{2}$$

$$|M_{Ed,II}| = |M_{Ed}| - |V_{Ed,rechts}| \cdot \frac{t}{2}$$

mit  $V_{Ed}$  als Bemessungsquerkräfte links bzw. rechts von der Unterstützung.



**Bild 3.4:** Momentenausrundung und Anschnittmomente bei monolithischem Anschluss

Eine Bemessung in Auflagermitte wird in der Regel nicht maßgebend, da die statische Nutzhöhe sich unter 1:3 vergrößert.

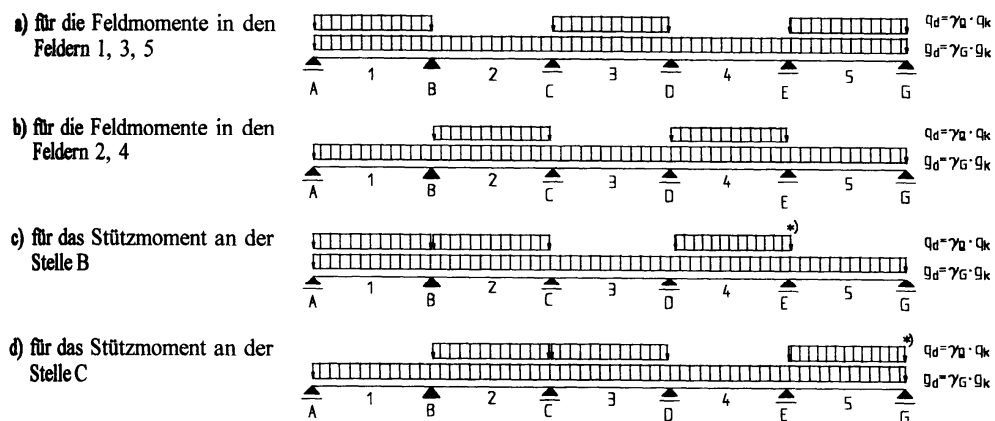
$$|M'_{Ed}| = |M_{Ed}| - |C_{Ed}| \cdot \frac{t}{8}$$

$$d' = d + \frac{t}{6}$$

Die Vergrößerung der statischen Nutzhöhe unter 1:3 gilt für alle Stahlbetonbauteile (Balken, Stützen, Wände). Sie darf auch für Vouten angesetzt werden. Entscheidend für die Bemessung ist das größte Randmoment  $M_{Ed,I}$  oder  $M_{Ed,II}$ . Es ist i.d.R. die Seite, an der die kleinere Querkraft  $V_{Ed}$  wirkt.

### 3.1.4 Lastanordnung

Bei der Ermittlung der Schnittgrößen sind die Lasten so anzuordnen, dass sie die ungünstigsten Werte für die Bemessung ergeben. Die Eigenlasten sind in jedem Feld anzusetzen. Die Einwirkungen aus der Nutzung sind nur in den Feldern zu berücksichtigen, wo sie ungünstige Einflüsse auf die Bemessungsgrößen haben.



**Bild 3.5:** Ungünstige Laststellungen für einen Fünf-Feld-Träger

Da heute in der Regel EDV-Programme zur Schnittgrößenermittlung eingesetzt werden, ist eine Vorgabe der Lastfälle gemäß Bild 3.5 nicht mehr sinnvoll. Vielmehr sollte man für jede Nutzlast auf einem Feld einen eigenen (weiteren) veränderlichen Lastfall definieren und die Ermittlung der maßgebenden Schnittgrößen dann der Kombinatorik der Programme überlassen. Dabei werden im Hinblick auf die gesuchte Schnittgröße nur ungünstig wirkende veränderliche Lastfälle vorzeichengerecht bei der Superposition berücksichtigt.

### 3.1.5 Linear-elastische Schnittgrößenermittlung

Bei einer linear-elastischen Berechnung – sie stellt das übliche und wegen der großen praktischen Vorteile (z.B. Superposition) häufig verwendete Berechnungsverfahren dar – wird die Schnittgrößenverteilung im Bauteil unter Ansatz der Querschnittswerte des ungerissenen Zustands (Zustand I) ermittelt. Für beide Werkstoffkomponenten des Stahlbetons wird lineares Spannungs-Dehnungsverhalten angenommen. Ein Steifigkeitsabfall einzelner Bauteilbereiche durch Rissbildung wird nicht in Ansatz gebracht. Trotzdem führt eine Bemessung auf der Basis der so ermittelten Schnittgrößen zu sicheren Ergebnissen, wenn die nachfolgenden Regeln beachtet werden:

- Es muss ein statischer Gleichgewichtszustand vorhanden sein.
- Es darf an keiner Stelle im Tragwerk das Fließmoment (Biegemoment, das die eingelegte Bewehrung über die Fließgrenze hinaus beansprucht) überschritten werden.
- Es muss eine hinreichende Rotationsfähigkeit in Abschnitten mit hoher Biegebeanspruchung vorhanden sein (d.h. es darf zu keinem vorzeitigen Versagen der Druckzone bei hohen Bewehrungsgraden kommen).

Während die beiden erstgenannten Regeln allein durch die statische Berechnung (Gleichgewichtsbedingungen müssen grundsätzlich immer erfüllt sein) und durch die im Rahmen der Bemessung sichergestellte Querschnittstragfähigkeit (Grenzdehnungen und Grenzspannungen dürfen nicht überschritten sein) eingehalten werden, ist eine hinreichende Rotationsfähigkeit nachzuweisen oder durch bestimmte konstruktive Maßnahmen zu gewährleisten. Eine solche ist das Einlegen einer Mindestbewehrung nach DIN EN 1992-1-1, Kap. 9.2.1.1 oder das Vermeiden von hohen Bewehrungsgraden.

Der Nachweis einer hinreichenden Rotationsfähigkeit gilt als erfüllt, wenn die Druckzonenhöhe auf  $x/d \leq 0,45$  (für Normalbeton bis C50/60) bzw. auf  $x/d \leq 0,35$  (für Normalbeton ab C55/67) begrenzt wird. Diese Regelung lässt die Norm nur für sogenannte „regelmäßige“ Systeme zu. Dazu gehören u.a. überwiegend auf Biegung beanspruchte Durchlaufträger (kontinuierlich gestützte Platten, Balken oder Riegel in horizontal unverschieblichen Rahmen) mit einem Stützweitenverhältnis von  $0,5 \leq l_i / l_{i+1} \leq 2,0$ .

Linear-elastische Berechnungsverfahren dürfen sowohl in den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit als auch in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit verwendet werden. Bei wesentlichen Zwangseinwirkungen können diese Verfahren aufgrund der Vernachlässigung der Steifigkeitsabnahme infolge Rissbildung zu sehr unwirtschaftlichen Ergebnissen führen. Aus diesem Grund darf bei einer linear-elastischen Schnittgrößenermittlung der Teilsicherheitsbeiwert für Zwangseinwirkungen von  $\gamma_Q = 1,5$  auf  $\gamma_Q = 1,2$  reduziert werden.

### 3.1.6 Linear-elastische Berechnungsverfahren mit begrenzter Momentenumlagerung

Für die Berechnung der Schnittgrößen nach der linear-elastischen Methode ist es möglich, die ermittelten Werte unter Beibehaltung der Gleichgewichtsbedingungen umzulagern. Vorteile einer solchen Umlagerung ergeben sich aus der Vermeidung übermäßiger Bewehrungskonzentration in Bereichen mit

extremaler Biegebeanspruchung, einer besseren Ausnutzung der Bewehrung bei unterschiedlichen Lastfallkombinationen und einer besseren Ausnutzung der Querschnitte im Hinblick auf ihre tatsächlichen Steifigkeiten.

Die DIN EN 1992-1-1 gibt unter Kap. 5.5 hierzu entsprechende Rahmenbedingungen. Bei durchlaufenden Balken und Platten, die vorwiegend auf Biegung beansprucht sind und bei denen das Stützweitenverhältnissen benachbarter Felder mit annähernd gleicher Steifigkeit die Bedingung  $0,5 \leq l_i / l_{i+1} \leq 2,0$  erfüllen, dürfen die Biegemomente ohne besonderen Nachweis der Rotationsfähigkeit in begrenztem Umfang umgelagert werden:

- Beton:  $\delta \geq 0,64 + 0,8 \cdot x_u/d$  für Beton  $\leq$  C 50/60  
 $\delta \geq 0,72 + 0,8 \cdot x_u/d$  für Beton  $\geq$  C 55/67
- hochduktiler Bewehrungsstahl:  $\delta \geq 0,70$  für Betone  $\leq$  C 50/60  
 $\delta \geq 0,80$  für Betone  $\geq$  C 55/67
- normalduktiler Bewehrungsstahl:  $\delta \geq 0,85$  für Betone  $\leq$  C 50/60  
 $\delta = 1,00$  für Betone  $\geq$  C 55/67

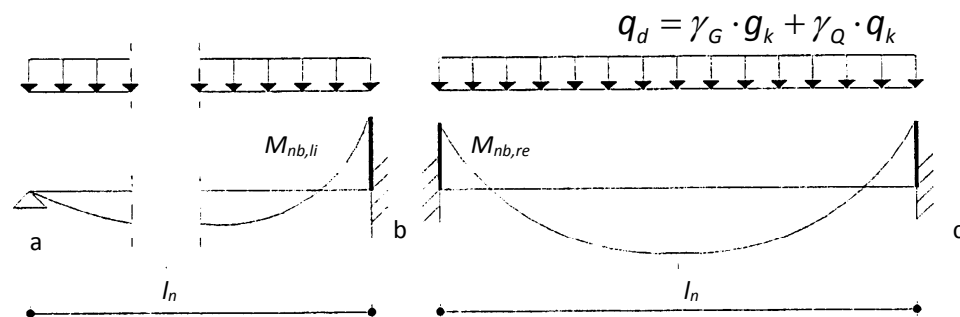
mit  $\delta = M_{mit\ Uuml.} / M_{ohne\ Uuml.}$  (Umlagerungsfaktor; es gilt grundsätzlich  $\delta \leq 1,0$ )

$x_u$  = Druckzonenhöhe im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) nach Umlagerung

$d$  = statische Nutzhöhe des Querschnitts

Die Auswirkungen einer Momentenumlagerung müssen bei der Bemessung durchgängig berücksichtigt werden. Dies gilt für die Bemessung der Biegung mit oder ohne Längskraft, für die Bemessung auf Querkraft, für die Verankerungsregeln und für die Abstufung der Bewehrung.

Der Bemessung liegen unverändert in Stützbereichen bei biegesteifen Anschluss die Anschnittsmomente und bei freier Auflagerung der Extremwert der Momentenlinie nach parabelförmiger Ausrundung gemäß Kap. 3.1.2 zugrunde. Als Mindestmomente müssen 65% der Momente des am Anschnitt der Innstütze starr eingespannten Einfeldsystems eingehalten werden.



**Bild 3.6:** Mindesteinspannmomente

Für eine Gleichstreckenlastbeanspruchung ergibt sich mit

$$q_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k$$

$$M_{nb,li} = -q_d \cdot l_{n2} / 8 \quad \longrightarrow \quad \text{mind } M_{b,li} = 0,65 \cdot M_{nb,li} = -q_d \cdot l_{n2} / 12,3$$

$$M_{nb,re} = -q_d \cdot l_{n2} / 12 \quad \longrightarrow \quad \text{mind } M_{b,re} = 0,65 \cdot M_{nb,re} = -q_d \cdot l_{n2} / 18,5$$

Das Bemessungsmoment  $M_{Eds}$  ist auf die Bewehrungslage bezogen und ergibt sich unter Berücksichtigung der Normalkraft zu

$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1}$$

Hieraus lässt sich das dimensionslose Moment  $\mu_{Eds}$  berechnen aus

$$\mu_{Eds} = M_{Eds} / (b \cdot d^2 \cdot f_{cd})$$

In Abhängigkeit dieses dimensionslosen Wertes lässt sich die bezogene Druckzonenhöhe  $x_u/d$  in tabellarischer Form zusammenstellen. Tab. 3.1 gilt nur für Betone  $\leq C 50/60$ .

**Tabelle 3.1:** Bezogene Druckzonenhöhe in Abhängigkeit vom dimensionslosen Moment

| $\mu_{Eds}$ | $\xi = x_u/d$ | $\mu_{Eds}$ | $\xi = x_u/d$ | $\mu_{Eds}$ | $\xi = x_u/d$ | $\mu_{Eds}$ | $\xi = x_u/d$ |
|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|
| 0,01        | 0,030         | 0,11        | 0,145         | 0,21        | 0,296         | 0,31        | 0,478         |
| 0,02        | 0,044         | 0,12        | 0,159         | 0,22        | 0,312         | 0,32        | 0,499         |
| 0,03        | 0,055         | 0,13        | 0,173         | 0,23        | 0,329         | 0,33        | 0,520         |
| 0,04        | 0,066         | 0,14        | 0,188         | 0,24        | 0,346         | 0,34        | 0,542         |
| 0,05        | 0,076         | 0,15        | 0,202         | 0,25        | 0,364         | 0,35        | 0,565         |
| 0,06        | 0,086         | 0,16        | 0,217         | 0,26        | 0,382         | 0,36        | 0,589         |
| 0,07        | 0,097         | 0,17        | 0,232         | 0,27        | 0,400         | 0,37        | 0,614         |
| 0,08        | 0,107         | 0,18        | 0,248         | 0,28        | 0,419         | 0,38        | 0,640         |
| 0,09        | 0,118         | 0,19        | 0,264         | 0,29        | 0,438         | 0,39        | 0,667         |
| 0,10        | 0,131         | 0,20        | 0,280         | 0,30        | 0,458         | 0,40        | 0,695         |

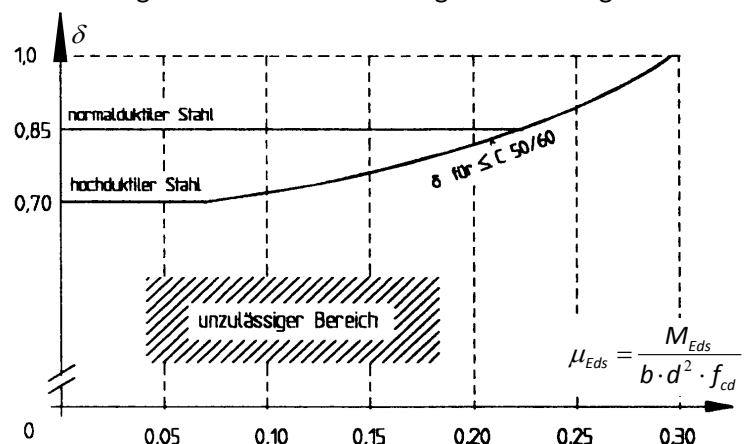
Aus den Grenzwerten für den Beton bis C 50/55 und den Betonstahl lässt sich das bezogene Druckzonenerverhältnis ermitteln; für

a) hochduktil  $0,64 + 0,8 \cdot x/d = 0,70 \rightarrow x/d = (0,70 - 0,64) / 0,80 = \underline{0,075}$

b) normalduktil  $0,64 + 0,8 \cdot x/d = 0,85 \rightarrow x/d = (0,85 - 0,64) / 0,80 = \underline{0,2625}$

Bei  $\delta = 1$  wird das Verhältnis  $x/d = 0,45$ . Für größere Werte des Druckzonenerverhältnisses ist eine Umlagerung nicht zulässig.

Die Einhaltung der Grenzen für die Umlagerung erfordern im Regelfall eine Iteration, da der Faktor  $\delta$  mit der bezogenen Druckzonenhöhe  $x_u/d$  erst nach der Umlagerung zu ermitteln ist. Im folgenden Diagramm ist diese Iteration bereits vorweggenommen worden, so dass mit dem auf die Bewehrung bezogenem Moment  $M_{Eds}$  vor der Umlagerung der zulässige Bereich von  $\delta$  direkt abgelesen werden kann. Für den Beton wurde hierbei das Parabel-Rechteck-Diagramm für die Bemessung berücksichtigt.

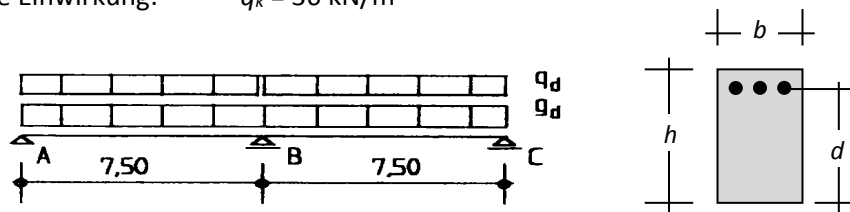


**Bild 3.7:** Anwendungsbereich der Momentenumlagerung (gilt nur für Stahlbeton-Rechteckquerschnitte ohne Druckbewehrung; Normalbeton  $\leq C50/60$ )

**Beispiel 3.2:** Momentenumlagerung bei einem Zweifeldträger mit Rechteckquerschnitt

Gegeben: Querschnittsabmessung:  $b/h/d = 30/70/65$  cm      Beton: C 30/37  
 Ständige Einwirkung:  $g_k = 20$  kN/m      Stahl: B 500 B  
 Veränderliche Einwirkung:  $q_k = 36$  kN/m

System:



Gesucht: Es soll das Stützmoment unter Ausnutzung der maximal zulässigen Umlagerung bestimmt werden

Bemessungslasten:  $g_d = \gamma_G \cdot g_k = 1,35 \cdot 20,0 = \underline{27,0 \text{ kN/m}}$

$q_d = \gamma_Q \cdot q_k = 1,50 \cdot 36,0 = \underline{54,0 \text{ kN/m}}$

Bemessungswert der Betondruckspannung:

$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c = 0,85 \cdot 30 / 1,50 = \underline{17,0 \text{ N/mm}^2}$

Biegemoment mit Hilfe der linear-elastischen Berechnung:

über der Stützung:  $M_{Ed,b} = -0,125 \cdot (27 + 54,0) \cdot 7,50^2 = \underline{-570 \text{ kNm}}$

im Feld (nur  $q_{d,links}$ ):  $\max M_{Ed,1} = (0,070 \cdot 27,0 + 0,096 \cdot 54,0) \cdot 7,50^2 = \underline{+398 \text{ kNm}}$

zugeh  $M_{Ed,b} = - (0,125 \cdot 27,0 + 0,063 \cdot 54,0) \cdot 7,50^2 = \underline{-381 \text{ kNm}}$

Lineare Berechnung mit begrenzter Umlagerung:

$\mu_{Eds} = 0,570 / (0,30 \cdot 0,65^2 \cdot 17,0) = \underline{0,265}$

→ zul  $\delta = 0,92$

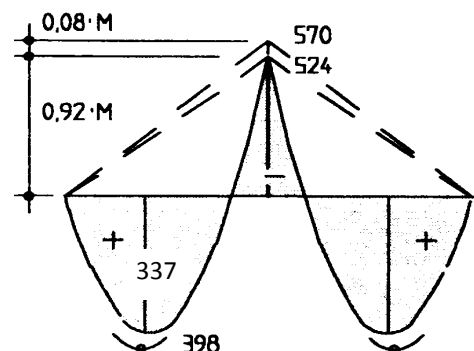
$M_{Ed,b,\delta} = 0,92 \cdot (-570) = -524 \text{ kNm} \leq -381 \text{ kNm}$

Das Stützmoment  $M_{Ed}$  ist nach der Umlagerung in der Lastfallkombination "Volllast" noch größer als das zugehörige Moment in der Lastfallkombination "einseitige Verkehrslast". Für die Bemessung an der Stütze bleibt daher der Lastfall "Volllast" maßgebend, ebenso gilt für das maximale Feldmoment unverändert  $\max M_{Ed1} = 398 \text{ kNm}$ .

Kontrolle:  $\mu_{Eds} = 0,524 / (0,30 \cdot 0,65^2 \cdot 17,0) = 0,243$

→  $x/d = 0,35$  aus obiger Tabelle

zul  $\delta = 0,64 + 0,80 \cdot 0,35 = 0,92 \checkmark$



**Bild 3.8:** Biegemomentenlinie nach der Umlagerung



### 3.1.7 Nichtlineare Berechnungsverfahren und das Verfahren nach der Plastizitätstheorie

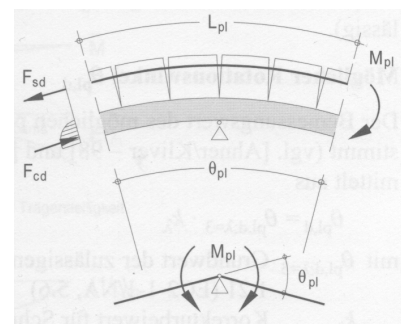
Bei nichtlinearen Verfahren wird der Widerspruch „linear-elastisches Tragverhalten bei der Schnittgrößenermittlung, aber nichtlineares Parabel-Rechteckdiagramm bei der Querschnittsbemessung (vgl. Bild 2.2)“ aufgelöst. Auch bei der Schnittgrößenermittlung wird jetzt das tatsächliche Tragverhalten des Systems durch Verwendung der wirklichkeitsnahen Spannungs-Dehnungslinien (vgl. Bild 2.1 für Beton und Bild 2.12 für den Bewehrungsstahl) herangezogen. Der Ausfall der Betonzugzone und folglich das Einsetzen der Rissbildung, das nichtlineare Spannungs-Dehnungsverhalten des Betons im Druckbereich sowie die Menge und genaue Höhenlage der Zugbewehrung haben maßgeblichen Einfluss auf die Querschnittssteifigkeiten  $EA''$  (Dehnsteifigkeit im Zustand II) bzw.  $E''$  (Biegesteifigkeit im Zustand II); im Extremfall kommt es zu einer Verminderung dieser Steifigkeiten um bis zu 70% gegenüber den Steifigkeiten im Zustand I. Aus der Baustatik ist bekannt, dass verminderte Steifigkeitswerte bei

- statisch bestimmten Systemen zu größeren Verformungen und bei
- statisch unbestimmten Systemen neben größeren Verformungen auch zu anderen Schnittgrößenverteilungen entlang der Stabachse

führen. Um die Schnittgrößen gerade bei einem statisch unbestimmten System wirklichkeitsnah zu ermitteln, muss die Bewehrung zunächst geschätzt werden. Auf iterativem Wege, d.h. mit einem entsprechend aufwändigen DV-gestützten Verfahren muss dann das Tragverhalten unter schrittweiser Laststeigerung soweit analysiert werden, bis die Tragfähigkeit durch Anpassung der Bewehrungsmenge der tatsächlich vorhandenen Beanspruchung in jedem Schnitt des Systems entspricht.

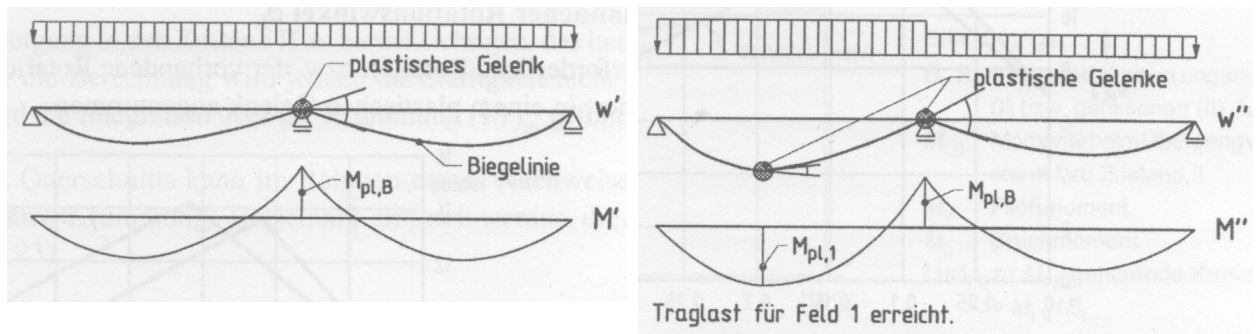
Erschwerend kommt hinzu, dass bei nichtlinearen Verfahren die Superposition von Schnittgrößen und Verformungen nicht mehr zulässig ist. Jede Lastfallkombination muss einzeln betrachtet und – wie oben erwähnt – iterativ analysiert werden. Anforderungen an den Einsatz nichtlinearer Verfahren regelt die DIN EN 1992-1-1 in Kap. 5.7.

Das Verfahren nach der Plastizitätstheorie stellt einen Sonderfall der nichtlinearen Berechnung dar. Es darf nur für Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit benutzt werden (vgl. Einsatzbedingungen gemäß DIN EN 1992-1-1, Kap. 5.6). Die „Idee“ der Plastizitätstheorie beruht auf der Ausbildung sogenannter plastischer Gelenke oder Fließgelenke (Bild 3.9).



**Bild 3.9:** Plastische Rotation im Bereich plastischer Gelenke

Übliche Tragwerksberechnungen gehen von einem Systemversagen aus, sobald an einer beliebigen Stelle die Tragfähigkeit überschritten wird. Das gilt uneingeschränkt für statisch bestimmte Systeme. Bildet sich bei diesen durch Überschreitung der Tragfähigkeit ein „Gelenk“ aus, so entsteht eine kinematische Kette (→ Systemversagen). Bei statisch unbestimmten Systemen kann sich jedoch immer noch ein stabiler Gleichgewichtszustand einstellen, wenn sich an einer beliebigen Stelle ein plastisches Gelenk ausgebildet. Der Grad der statischen Unbestimmtheit wird um „1“ reduziert. Erst wenn sich im Tragwerk eine kinematische Kette durch – je nach statischer Unbestimmtheit des Systems – ein oder mehrere Gelenke ausgebildet haben, ist die Systemtraglast erreicht.



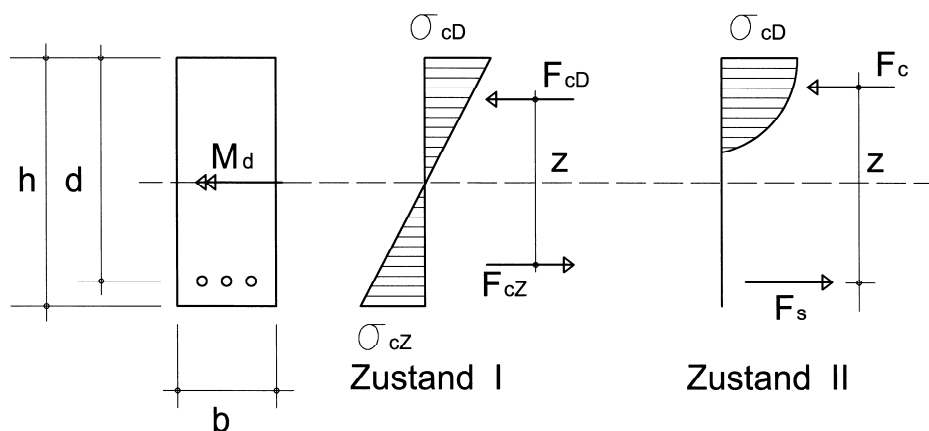
**Bild 3.10 a:** Ausbildung eines plastischen Gelenks an der Stütze am Mittelaufleger

**Bild 3.10 b:** Kinematische Kette nach Ausbildung eines weiteren Gelenks im linken Feld (Systemtraglast ist erreicht)

Voraussetzung für das Entstehen von plastischen Gelenken ist eine ausreichende Duktilität des Tragwerks mit ausreichender Rotationsfähigkeit in den plastischen Bereichen (Länge:  $\sim 1,2 \cdot$  Trägerhöhe  $h$ ).

### 3.2 Grundlagen zur Biegebemessung

Teilt man bei biegebeanspruchten Bauteilen das Moment durch den Hebelarm der inneren Kräfte, so ergibt sich ein Kräftepaar aus einer Druck- und Zugkraft. Die Druckkraft wird vom Beton aufgenommen und die Zugkraft von den Stahleinlagen.



Zustand I: Volle Mitwirkung des Betons in der Zugzone, geringe Zugspannungen (kleines Biegemoment), keine Risse

Zustand II: Vernachlässigung der Mitwirkung des Betons in der Zugzone, Bewehrung übernimmt volle Zugkraft, Beton weist Risse in Zugzone auf, Spannungsverteilung ist nicht mehr linear, innerer Hebelarm  $> 2/3 \cdot h$

**Bild 3.11:** Wirkungsweise beim Zustand I und II

Der Durchführung der Biegebemessung (GZT) liegen folgende Rechenannahmen zugrunde:

- Die Zugfestigkeit des Betons wird vollständig vernachlässigt, weil sie häufig durch Eigenspannungen (Schwinden, Kriechen, Hydratationswärme) aufgezehrt wird. Es ist grundsätzlich vom Zustand II auszugehen.
- Zwischen Beton und Stahleinlagen ist ein voller Verbund anzusetzen, d.h. gleiche Dehnungen für Beton und Stahleinlagen in Höhe der Bewehrung.

- Das Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli Hypothese) wird vorausgesetzt, d.h. die Dehnungen wachsen proportional zu ihrem Abstand von der Nulllinie an.
- Die Verteilung der Betondruckspannungen entsprechend den rechnerischen Spannungs-Dehnungs-linien nach Bild 2.2 (bzw. Bild 2.3 oder Bild 2,4). Die Druckdehnungen sind bei überwiegend auf Bie-gung beanspruchten Querschnitten auf  $\epsilon_{cu2}$  bzw.  $\epsilon_{cu3}$  zu begrenzen (vgl. Tab. 2.1).
- Die Spannungs-Dehnungslinie für den Betonstahl wird nach Bild 2.13 angesetzt. Als maximale Stahl-dehnung im Grenzzustand der Tragfähigkeit gilt:  $\epsilon_{su} \leq 25$  ‰.

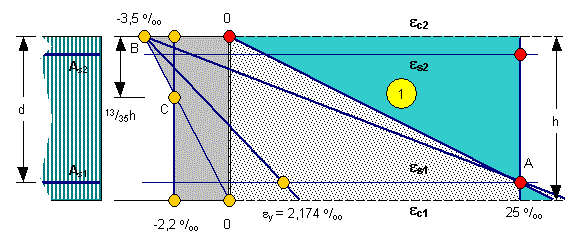
Beim Beton ist der Spannungs-Dehnungsverlauf nichtlinear, d.h. die Druckspannungsverteilung ist über die Querschnittshöhe betrachtet nicht dreiecksförmig. Die wirkliche Verteilung ist von vielen Faktoren abhängig, u.a. von der Betonzusammensetzung, dem Betonalter, der Belastungsgeschwindigkeit und -dauer sowie der Querschnittsform. Das Parabel-Rechteck-Diagramm ist eine gute Näherung für alle Be-tone. Hierauf ist im Abschn. 2.2 hinreichend eingegangen worden.

Für den Betonstahl wird die bilineare Spannungs-Dehnungslinie herangezogen. Der elastische Bereich wird im Gebrauchszustand angewandt und der plastische Bereich dient für Nachweise mit Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT).

Bei den möglichen Dehnungsverteilungen haben die fünf Bereiche die folgenden charakteristischen Merkmale:

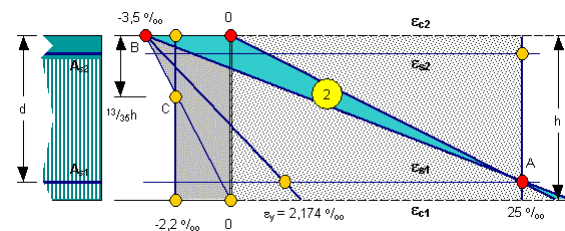
• Bereich 1:

Zugkraft bei geringer Ausmitte (Zugkraft greift innerhalb der Bewehrungslagen an); keine Ausnutzung der Druckzone, Bruch erfolgt durch Versagen der Bewehrung



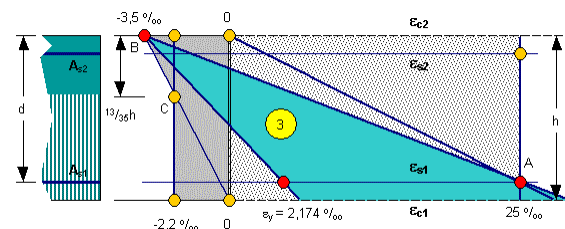
• Bereich 2:

Biegung oder Biegung mit Normalkraft;  $\epsilon_{cu} \geq -3,5$  ‰;  $\epsilon_s = 25$  ‰; keine Ausnutzung der Druckzone, Bruch erfolgt durch Versagen der Bewehrung;  $f_{yd}$  wird erreicht



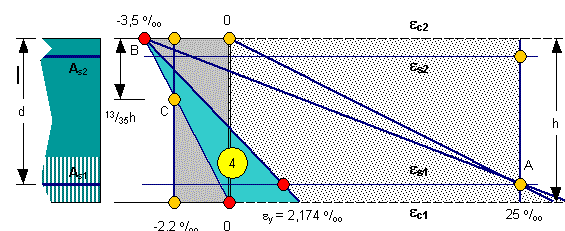
• Bereich 3:

Biegung oder Biegung mit Normalkraft, volle Ausnutzung der Betondruckzone;  $\epsilon_{cu} = -3,5$  ‰; Stahldehnungen sind geringer als zulässig



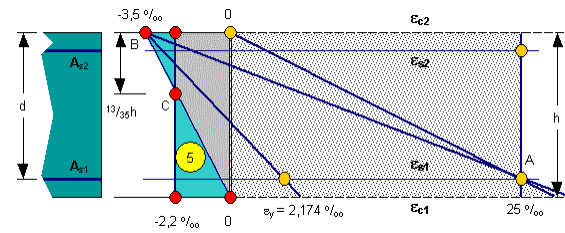
• Bereich 4:

Außermittiger Druck; Stahl nicht voll ausge-nutzt; Beton bis  $f_{cd}$  ausgenutzt; Bruch erfolgt durch Versagen des Betons;  $\epsilon_{cu} = -3,5$  ‰



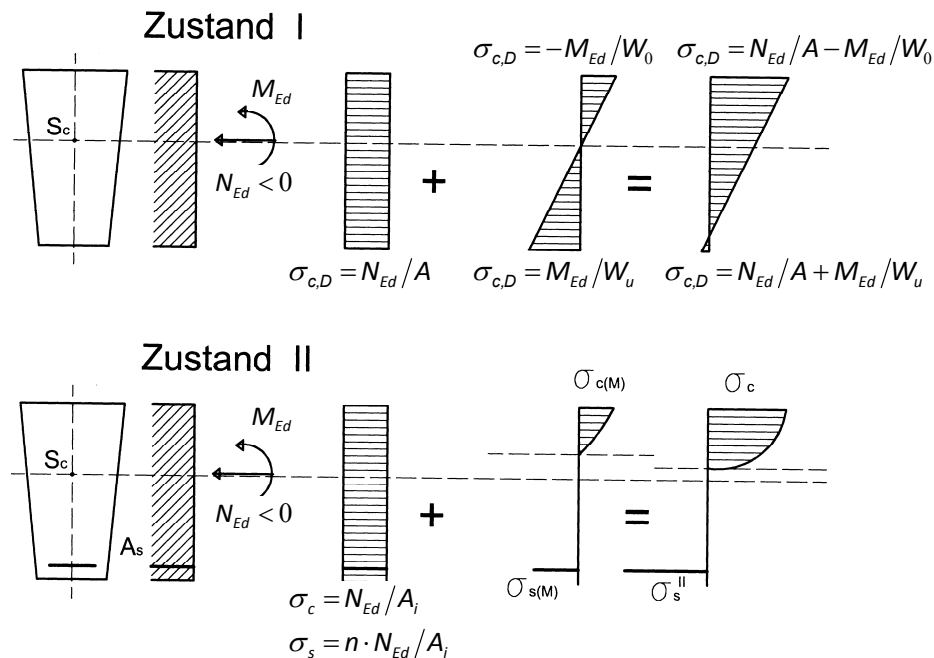
- Bereich 5:

Druckkraft von geringer Ausmitte; Querschnitt ist voll überdrückt; die Dehnung im Punkt C darf nur  $\epsilon_{c2}$  betragen:  $\epsilon_{c2} = -3,5 - 0,75 \cdot \epsilon_{c1}$  [0/00]



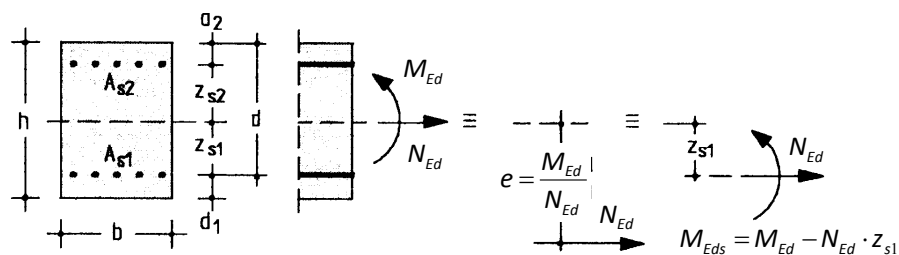
### 3.3 Bemessungsformeln

Anders als bei einem homogenen ideal-elastischen Querschnitt müssen die Bemessungsschnittgrößen  $M_{Ed}$  und  $N_{Ed}$  zusammen betrachtet werden. Eine Überlagerung der Wirkungen aus beiden Schnittgrößen auf Spannungen und Dehnungen ist wegen des nichtlinearen Werkstoffverhaltens nicht möglich. Das Superpositions-gesetz hat keine Gültigkeit (vgl. Bild 3.12).



**Bild 3.12:** Spannungsverteilung infolge  $N$  und  $M$

Das Biegemoment  $M$  und die Normalkraft  $N$  sind gemäß statischer Definition auf die Schwerachse des Querschnittes bezogen. Für die Bemessung müssen diese als „versetzte“ Schnittgrößen auf die Achse der Biegezugbewehrung (Längsbewehrung am stärker auf Zug beanspruchten Rand) bezogen werden.



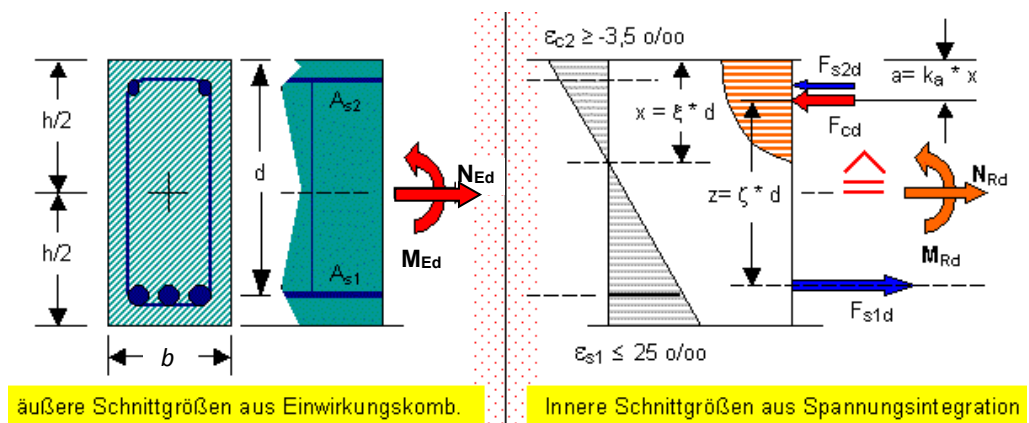
**Bild 3.13:** Schnittgrößen in Schwerachse und „versetzte“ Schnittgrößen

Hieraus ergibt sich: 
$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1}$$

Die Normalkraft  $N_{Ed}$  muss hierbei vorzeichengerecht eingesetzt werden ( $N_{Ed} > 0 \rightarrow$  Längszugkraft;  $N_{Ed} < 0 \rightarrow$  Längsdruckkraft).

Bei der Biegebemessung (Nachweis der Tragfähigkeit auf Biegung mit/ohne Längskraft) sind folgende Parameter beteiligt:

- |   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| <p>als <u>bekannt</u>e<br/>oder aus Er-<br/>fahrung<br/><u>vorgebbare</u><br/>Größen:</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Querschnitt mit <math>b</math> und <math>h</math></li> <li>• die Betongüte</li> <li>• die Stahlgüte</li> <li>• Lage der Bewehrung, gemessen in der Achse; daraus folgt die Nutzhöhe <math>d</math></li> </ul> | <p>als <u>gesuchte</u><br/>Größen:</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• der Dehnungszustand</li> <li>• die Spannungen</li> <li>• die inneren Kräfte</li> <li>• die erforderliche Bewehrung</li> </ul> |
|---|--|--|--|



**Bild 3.14:** Dehnungs- und Spannungszustand (in einem Rechteckquerschnitt)

Die Biegebemessung beruht auf folgenden Identitätsbeziehungen; und zwar wird gefordert, dass die einwirkenden und auf die Biegezugbewehrung bezogenen Schnittgrößen  $M_{Eds}$  und  $N_{Ed}$  (mindestens) den Bauteilwiderständen  $M_{Rds}$  und  $N_{Rd}$  entsprechen müssen.

$$N_{Ed} \equiv N_{Rd} \quad \text{und} \quad M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} \equiv M_{Rds}$$

Die Bauteilwiderstände  $M_{Rds}$  und  $N_{Rd}$  werden als „innere“ Schnittgrößen bezeichnet. Sie ergeben sich zu:

$$N_{Rd} = -|F_{cd}| - |F_{s2d}| + F_{s1d}$$

$$M_{Rds} = |F_{cd}| \cdot z + |F_{s2d}| \cdot (d - d_2)$$

mit den Spannungsergebnissen

$$F_{cd} = x \cdot b \cdot \alpha_v \cdot f_{cd}$$

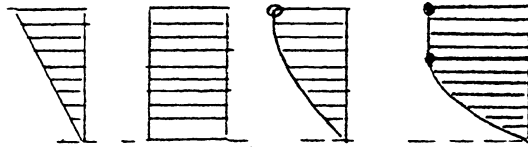
$$F_{s2d} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2d}$$

$$F_{s1d} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1d}$$

Die Größe und die genaue Lage der Spannungsergebnisse der Betondruckzone  $F_{cd}$  werden mit den Hilfwerten  $\alpha_v$  und  $a = k_a \cdot x$  bestimmt. Mit  $x$  wird die Höhe der Druckzone, mit  $a$  der Abstand von  $F_{cd}$

vom Druckrand bezeichnet. Der Hilfswert  $\alpha_v$  ist ein Völligkeitsbeiwert, der wie der dimensionslose Hilfswert  $k_a$  der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen ist.

**Tabelle 3.2:** Hilfswert  $\alpha_v$  und  $k_a$  in Abhängigkeit der Spannungsverläufe



|            | Dreieck | Rechteck | Parabel | Parabel-Rechteck | Allgemein Parabel-Rechteck   |   |
|------------|---------|----------|---------|------------------|--|---|
|            |         |          |         |                  | $0 \leq  \varepsilon_{c2}  \leq 2,0$ 0/00                            | $2,0 <  \varepsilon_{c2}  \leq 3,5$ 0/00  |
| $\alpha_v$ | 0,5     | 1        | 2/3     | 0,81             | $\frac{ \varepsilon_{c2}  \cdot (6 -  \varepsilon_{c2} )}{12}$       | $\frac{ \varepsilon_{c2}  - 2/3}{ \varepsilon_{c2} }$   |
| $k_a$      | 1/3     | 1/2      | 3/8     | 0,416            | $\frac{(8 -  \varepsilon_{c2} )}{(24 - 4 \cdot  \varepsilon_{c2} )}$ | $\frac{ \varepsilon_{c2}  \cdot (3 \cdot  \varepsilon_{c2}  - 4) + 2}{6 \cdot  \varepsilon_{c2} ^2 - 4 \cdot  \varepsilon_{c2} }$ |

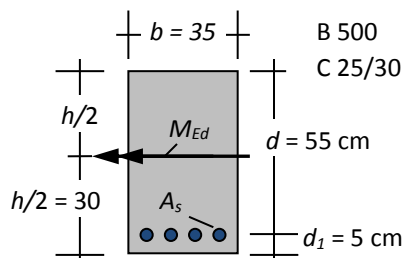
Des Weiteren werden die Verhältnswerte  $\xi$  und  $\zeta$  benötigt. Die Höhe der Druckzone  $x$  wie auch der innere Hebelarm  $z$  können damit ins Verhältnis zur Nutzhöhe  $d$  gesetzt werden; es gilt:

$$x = \xi \cdot d \quad \text{bzw.} \quad \xi = \frac{x}{d} \qquad z = \zeta \cdot d \quad \text{bzw.} \quad \zeta = \frac{z}{d}$$

Mit den oben genannten Gleichungen ist der Nachweis einer ausreichenden Tragfähigkeit zu führen. Versucht man, die Gleichungen nach der gesuchten Bewehrungsmengen  $A_{s1}$  und  $A_{s2}$  aufzulösen, so gelingt es nur, wenn die Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe – bestimmt durch die Dehnungen  $\varepsilon_{c2}$  und  $\varepsilon_{s1}$  – durch eine Schätzung vorgegeben wird. Die Dehnungsverteilung ist iterativ so weit anzupassen, bis die Identitätsbedingungen erfüllt werden, d.h. die „äußeren“ Schnittgrößen (ermittelt aus statischen Berechnungen in Abhängigkeit von den einwirkenden Lasten) müssen den „inneren“ Schnittgrößen (ermittelt aus Spannungsintegration) entsprechen.

**Beispiel 3.3:** Biegebemessung eines Balkens mit Rechteckquerschnitt auf iterativem Wege

Gegeben: Querschnitt:



Schnittgrößen:

aus ständiger Last:  $M_{G,k} = 175,0$  kNm

aus veränderl. Last:  $M_{Q,k} = 120,0$  kNm

Einwirkung  $E_d$ : ( $\gamma_F$ -fache Einwirkung; vgl. Tabl. 1.3)

$$M_{Ed} = 1,35 \cdot 175 + 1,50 \cdot 120 = + \underline{416,25} \text{ kNm}$$

Gesucht: Nachweis im GZT, dass die Einwirkungen  $E_d$  die Tragfähigkeit  $R_d$  (hier der Tragwiderstand des Querschnittes bezüglich der reinen Biegebeanspruchung) nicht überschreitet.

Wegen  $N_{Ed} = 0$  ist das auf die Bewehrungsachse bezogene Biegemoment:

$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} = 416,25 - 0 \cdot 0,25 = + \underline{416,25} \text{ kNm}$$

Iteration 1: Dehnungsverteilung  $\varepsilon_{c2} = -3,5 \text{ 0/00}$  und  $\varepsilon_{s1} = +10,0 \text{ 0/00}$

$$\text{Höhe der Druckzone: } x = -\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{c2}} \cdot d = -\frac{-3,5}{10,0 + 3,5} \cdot 55 = 0,2593 \cdot 55 = \underline{14,26 \text{ cm}}$$

$$\text{Druckkraftresult.: } F_{cd} = x \cdot b \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} = x \cdot b \cdot \frac{3 \cdot |\varepsilon_{c2}| - 2}{3 \cdot |\varepsilon_{c2}|} \cdot f_{cd} = 14,26 \cdot 35 \cdot \frac{3 \cdot 3,5 - 2}{3 \cdot 3,5} \cdot 1,417 = \underline{572,51 \text{ kN}}$$

$$\text{Lage von } F_{cd}: a = k_a \cdot x = \frac{|\varepsilon_{c2}| \cdot (3 \cdot |\varepsilon_{c2}| - 4) + 2}{2 \cdot |\varepsilon_{c2}| \cdot (3 \cdot |\varepsilon_{c2}| - 2)} \cdot x = \frac{3,5 \cdot (3 \cdot 3,5 - 4) + 2}{2 \cdot 3,5 \cdot (3 \cdot 3,5 - 2)} \cdot 14,26 = \underline{5,93 \text{ cm}}$$

$$\text{Innerer Hebelarm: } z = d - a = 55,0 - 5,93 = \underline{49,07 \text{ cm}}$$

$$\text{Tragwiderstand: } M_{Rds} = F_{cd} \cdot z = 572,51 \cdot 0,4907 = \underline{280,93 \text{ kNm}} \rightarrow \boxed{280,93 < 416,25}$$

Der Tragwiderstand reicht nicht aus, um das einwirkende Moment aufzunehmen. Die Dehnungsverteilung muss neu geschätzt werden. Die Betondruckzone mit  $F_{cd}$  muss mehr „leisten“. Die Dehnung  $\varepsilon_{s1}$  in Höhe der Bewehrung wird deshalb reduziert, um die Höhe der Druckzone  $x$  zu vergrößern.

Iteration 2: Dehnungsverteilung  $\varepsilon_{c2} = -3,5 \text{ 0/00}$  und  $\varepsilon_{s1} = +4,93 \text{ 0/00}$  (☺)

$$\text{Höhe der Druckzone: } x = -\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{c2}} \cdot d = -\frac{-3,5}{4,93 + 3,5} \cdot 55 = 0,4152 \cdot 55 = \underline{22,84 \text{ cm}}$$

$$\text{Druckkraftresult.: } F_{cd} = x \cdot b \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} = 22,84 \cdot 35 \cdot \frac{3 \cdot 3,5 - 2}{3 \cdot 3,5} \cdot 1,417 = \underline{916,79 \text{ kN}}$$

$$\text{Lage von } F_{cd}: a = k_a \cdot x = \frac{3,5 \cdot (3 \cdot 3,5 - 4) + 2}{2 \cdot 3,5 \cdot (3 \cdot 3,5 - 2)} \cdot 22,84 = \underline{9,50 \text{ cm}}$$

$$\text{Innerer Hebelarm: } z = d - a = 55,0 - 9,50 = \underline{45,50 \text{ cm}}$$

$$\text{Tragwiderstand: } M_{Rds} = F_{cd} \cdot z = 916,79 \cdot 0,4550 = \underline{417,13 \text{ kNm}} \rightarrow \boxed{417,13 \approx 416,25}$$

Der Tragwiderstand reicht aus, um das einwirkende Moment aufzunehmen. Die Dehnungsverteilung ist richtig geschätzt worden. Es muss nun die erforderliche Bewehrung bestimmt werden. Dieser Schritt wird mit der 2. Identitätsbedingung geführt:  $N_{Ed} \equiv N_{Rd}$ . Daraus folgt:

$$0 = -|F_{cd}| + F_{sd} \rightarrow F_{sd} = |F_{cd}| = \underline{916,79 \text{ kN}}$$

Mit  $A_{s1} = \frac{F_{sd}}{\sigma_{sd}}$  und  $\sigma_{sd} = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50,0}{1,15} = 43,5 \text{ kN / cm}^2$  kann die Bewehrung bestimmt werden:

$$A_{s1} = \frac{F_{sd}}{\sigma_{sd}} = \frac{916,79}{43,5} = \underline{21,08 \text{ cm}^2}$$

Gewählt werden: 2Ø25 und 2Ø28 (in 1. Lage); vorh  $A_{s1} = 9,82 + 12,3 = \underline{22,12 \text{ cm}^2} > 21,08 \text{ cm}^2$

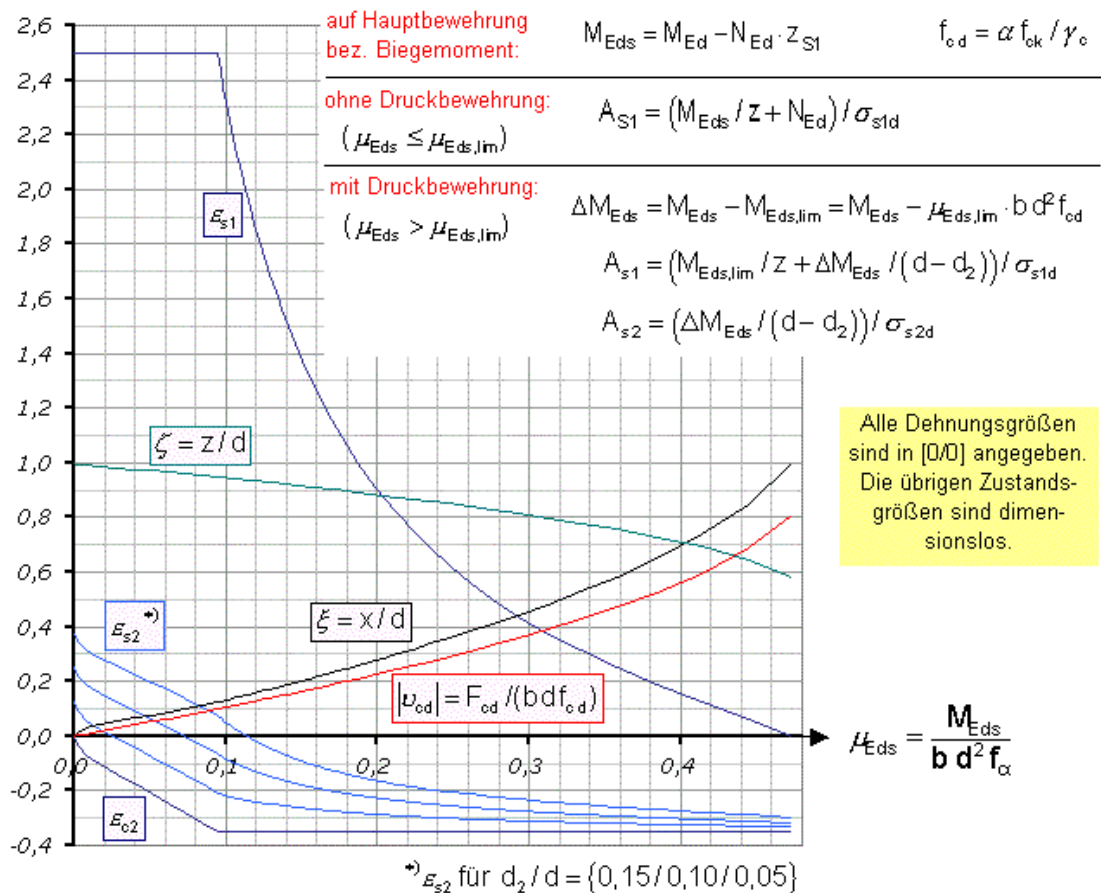
Mit dieser Bewehrung ist die Tragfähigkeit hinsichtlich der Zugzone sichergestellt. Durch Einhaltung der extremal zulässigen Betonrandspannung von (-) 3,5 0/00 wird die Tragfähigkeit auf der Betonseite gewährleistet. Durch die Erhöhung auf  $\gamma$ -fache Schnittgrößen und die Verminderung der Materialfestigkeiten durch Teilsicherheitsbeiwerte auf der Widerstandsseite wird eine ausreichende Tragsicherheit für den gesamten Querschnitt hergestellt.

**3.4 Bemessungstabeln**

Die iterative Bemessungsprozedur gemäß Beispiel 3.2 ist für eine Handrechnung kaum praktikabel. Deshalb sind zahlreiche Bemessungshilfen entwickelt worden, die bereits eine Vielzahl von Teillösungen beinhalten und damit die Bemessungsaufgabe deutlich beschleunigen. Die Teillösungen bestehen darin, dass für alle möglichen, im Bereich der zulässigen Grenzen liegenden Dehnungsverteilungen die Lage und Größe der Druckspannungserzeugenden  $F_{cd}$ , der innere Hebelarm  $z = \zeta \cdot d$  und die Höhe der Druckzone  $x = \xi \cdot d$  in Abhängigkeit von den Querschnittsabmessungen (bei Rechteckquerschnitten also  $d$  und  $b$ ) und der Betongüte in grafisch oder tabellarisch aufbereiteter Form zur Verfügung gestellt werden. Im Nachfolgenden werden die üblichen Bemessungshilfen vorgestellt.

- Das allgemeine Bemessungsdiagramm

Das allgemeine Bemessungsdiagramm (Bild 3.15) lässt sich universell bei Biegung mit und ohne Längskraft anwenden. Es deckt nur die Dehnungsbereiche 2, 3, und 4 ab (vgl. Kap. 3.2) und ist somit in seiner praktischen Anwendbarkeit auf Biegung und Längskraft mit großer Ausmitte beschränkt. Die Vorteile dieses Diagramms liegen darin, dass es für alle Stahlgüten und - zumindest in der unten dargestellten Form - für alle Betongüten bis zur Festigkeitsklasse C50/60 gültig ist. Eine zusätzliche Druckbewehrung kann bei jeder beliebig vorgegebenen Stahlzugdehnung  $\epsilon_{s1}$  oder einer möglichen Begrenzung der Druckzonenhöhe ermittelt werden. Das Bemessungsdiagramm ist ungeeignet bei Einwirkung einer großen Längsdruckkraft bei kleiner Ausmitte (negative Bewehrung). Zudem sind Ablesungenauigkeiten möglich. Der Rechenaufwand ist im Vergleich mit anderen Bemessungshilfen relativ hoch.



**Bild 3.15:** Allgemeines Bemessungsdiagramm (für Rechteckquerschnitt und Beton  $\leq C 50/60$ )



Die Ermittlung der Biegezugbewehrung und einer gegebenenfalls erforderlichen Druckbewehrung erfolgt mit den in Bild 3.15 angegebenen Gleichungen. Zur Sicherstellung einer ausreichenden Rotationsfähigkeit darf - sofern keine anderen Maßnahmen getroffen werden - die bezogene Druckzonenhöhe  $\xi = x/d$  folgende Grenzwerte nicht unterschreiten:

- $\xi_{lim} = 0,250$  oder  $\mu_{Eds,lim} = 0,181$  bei Anwendung der Plastizitätstheorie bei Platten
- $\xi_{lim} = 0,450$  oder  $\mu_{Eds,lim} = 0,296$  für Beton der Festigkeitsklasse bis C 50/60
- $\xi_{lim} = 0,617$  oder  $\mu_{Eds,lim} = 0,372$  bei Ausnutzung der Streckgrenze der Bewehrung (B500).

Eine bezogene Druckzonenhöhe von  $\xi_{lim} > 0,617$  führt zu einem unwirtschaftlichen Bemessungsergebnis, da dabei die Stahlzugdehnung  $\varepsilon_{s1}$  nicht mehr die Streckgrenze  $\varepsilon_{yd}$  erreicht. Folglich wird der Bewehrungsstahl nicht mehr voll ausgenutzt.

• Das  $\omega$ -Verfahren (Bemessungstabeln mit dimensionslosen Beiwerten)

Das  $\omega$ -Verfahren (Omega-Verfahren) ist die tabellarische Umsetzung des allgemeinen Bemessungsdiagramms, wodurch Ableseungenauigkeiten entfallen. Ihr Kernstück ist eine Bemessungstabelle mit dimensionslosen Beiwerten für Querschnitte mit rechteckiger Druckzone ohne Druckbewehrung (Bild 3.16). Die Ermittlung der Biegezugbewehrung ist denkbar einfach. Durch Vorgabe des bezogenen Momentes  $\mu_{Eds}$  wird mit Hilfe des entsprechenden (ggf. nächst größeren Tafelwert) die Zeile bestimmt, aus der dann der dimensionslose  $\omega$ -Wert abgelesen wird. Durch Einsetzen des  $\omega$ -Wertes in die Bemessungsformel ergibt sich nach Auswertung die erforderliche Hauptzugbewehrung. Zu beachten ist, dass eine derartige Tabelle nur eine beschränkte Anwendungsbreite hinsichtlich der Stahlgüte, der Betonfestigkeitsklasse und der Bemessungssituation besitzt.

$$\mu_{Eds} = M_{Eds} / (b \cdot d^2 \cdot f_{cd}) \quad \text{mit} \quad M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} \quad \quad f_{cd} = \alpha \cdot f_{ck} / \gamma_c$$

| $\mu_{Eds}$ | $\omega$ | $\xi = x/d$ | $\zeta = z/d$ | $\varepsilon_{c2}$<br>[o/oo] | $\varepsilon_{s1}$<br>[o/oo] | $\sigma_{sd}$<br>[N/mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_{sd}^*$<br>[N/mm <sup>2</sup> ] |
|-------------|----------|-------------|---------------|------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|---|
| .           | .        |             |               |                              |                              |                                       |   |
| 0,16        | 0,1759   | 0,217       | 0,910         | -3,50                        | 12,61                        | 435                                   | 445                                     |
| 0,17        | 0,1882   | 0,232       | 0,903         | -3,50                        | 11,56                        | 435                                   | 444                                     |
| 0,18        | 0,2007   | 0,248       | 0,897         | -3,50                        | 10,62                        | 435                                   | 443                                     |
| 0,19        | 0,2134   | 0,264       | 0,890         | -3,50                        | 9,78                         | 435                                   | 442                                     |
| 0,20        | 0,2263   | 0,280       | 0,884         | -3,50                        | 9,02                         | 435                                   | 441                                     |
| .           | .        |             |               |                              |                              |                                       |   |

$$A_{s1} = (\omega \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} + N_{Ed}) / \sigma_{sd1}$$

Alternativ darf  $\sigma_{sd}$  durch  $\sigma_{sd}^*$  ersetzt werden

**Bild 3.16:** Auszug aus Bemessungstabelle des  $\omega$ -Verfahrens

• Das  $k_d$ -Verfahren (Bemessungstabeln mit dimensionsgebundenen Beiwerten)

Ein sehr einfaches und beliebtes Bemessungsverfahren ist das  $k_d$ -Verfahren (vgl. Bild 3.17). Es ist wie sein Vorgänger tabellarisch aufgebaut und zur Bemessung von Stahlbetonquerschnitten mit (annähernd) rechteckiger Druckzone unter reiner Biegung und Biegung mit Längskraft bei großer Ausmitte

geeignet. Bei Längskraft mit kleiner Ausmitte, wie sie beispielsweise bei Stützenquerschnitten vorherrscht, führt dieses Verfahren zu unsinnigen Ergebnissen (negative Bewehrung).

Anders als das  $\omega$ -Verfahren bietet das  $k_d$ -Verfahren ergänzende Tabellen an, die den Übergang zur Druckbewehrung bei fest vorgegebenen Druckzonenhöhen ermöglichen. Der als Eingangswert vorab zu berechnende  $k_d$ -Wert ist ebenso wie der Bemessungshilfswert  $k_s$  dimensionsgebunden. Die Bemessungsformeln dieses Verfahrens sind deshalb mit angemessener Vorsicht auszuwerten.

| $k_d$ für Betonfestigkeitsklasse C ... |       |    |       |       |       | $k_s$ | $\xi$ | $\zeta$ | $\epsilon_{c2}$<br>[0/00] | $\epsilon_{s1}$<br>[0/00] |
|--|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|---------|---------------------------|---------------------------|
| 12/15                                  | 16/20 | .. | 40/50 | 45/55 | 50/60 |       |       |         |                           |                           |
| .                                      | .     |    | .     | .     | .     | .     | .     | .       | .                         | .                         |
| 2,85                                   | 2,47  | .. | 1,56  | 1,47  | 1,40  | 2,57  | 0,250 | 0,896   | -3,50                     | 10,52                     |
| 2,72                                   | 2,36  | .. | 1,49  | 1,41  | 1,33  | 2,60  | 0,277 | 0,885   | -3,50                     | 9,12                      |
| 2,62                                   | 2,27  | .. | 1,44  | 1,36  | 1,29  | 2,63  | 0,302 | 0,875   | -3,50                     | 8,10                      |
| 2,54                                   | 2,20  | .. | 1,39  | 1,31  | 1,24  | 2,66  | 0,325 | 0,865   | -3,50                     | 7,26                      |
| 2,47                                   | 2,14  | .. | 1,35  | 1,27  | 1,21  | 2,69  | 0,350 | 0,854   | -3,50                     | 6,50                      |
| .                                      | .     |    |       |       |       |       |       |         |                           |                           |
| .                                      | .     |    |       |       |       |       |       |         |                           |                           |

$$k_d = \frac{d \text{ [cm]}}{\sqrt{\frac{M_{Eds} \text{ [kNm]}}{b \text{ [m]}}}}$$

$$A_s \text{ [cm}^2\text{]} = k_s \cdot \frac{M_{Eds} \text{ [kNm]}}{d \text{ [cm]}} + \frac{N_{Ed} \text{ [kN]}}{43,5}$$

$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1}$$

**Bild 3.17:** Auszug aus Bemessungstabelle des  $k_d$ -Verfahrens

**Beispiel 3.4 a:** Biegebemessung mit Hilfe des allgemeinen Bemessungsdiagramms

Gegeben: Aufgabenstellung gemäß Beispiel 3.3

Gesucht: Nachweis im GZT, dass die Einwirkungen  $E_d$  die Tragfähigkeit  $R_d$  (hier der Tragwiderstand des Querschnittes bezüglich der reinen Biegebeanspruchung) nicht überschreitet.

Wegen  $N_{Ed} = 0$  ist das auf die Bewehrungsachse bezogene Biegemoment:

$$M_{Eds} = M_{Ed} = + \underline{416,25 \text{ kNm}}$$

Bezogenes Biegemoment (dimensionslose Größe):

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{416,25 \cdot 10^{-3}}{0,35 \cdot 0,55^2 \cdot 14,2} = 0,2769 \leq 0,371 = \mu_{Eds,lim}$$

Ablesewerte (bezogene Druckkraftresultierende, Druckzonenhöhe, innerer Hebelarm, Dehnungen):

$$|v_{cd}| = \frac{F_{cd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \underline{0,335} \rightarrow F_{cd} = 0,335 \cdot 0,35 \cdot 0,55 \cdot 14,2 = 0,916 \text{ MN} = \underline{916 \text{ kN}}$$

$$\xi = \frac{x}{d} = \underline{0,415} \rightarrow x = 0,415 \cdot 0,55 = 0,228 \text{ m} = \underline{22,8 \text{ cm}}$$

$$\zeta = \frac{z}{d} = \underline{0,83} \rightarrow z = 0,83 \cdot 0,55 = 0,456 \text{ m} = \underline{45,6 \text{ cm}}$$

$$\epsilon_{s1} = +4,9\text{‰} ; \quad \epsilon_{c2} = -3,5\text{‰}$$

Erforderliche Bewehrung:

$$\text{erf } A_{s1} = \frac{1}{\sigma_{s1d}} \cdot \left( \frac{M_{Eds}}{z} + N_{Ed} \right) = \frac{1}{43,5} \cdot \left( \frac{416,25}{0,456} + 0 \right) = \underline{21,0 \text{ cm}^2}$$

Gewählt werden: 2Ø25 und 2Ø28 (in 1. Lage); vorh  $A_{s1} = 9,82 + 12,3 = \underline{22,12 \text{ cm}^2} > 21,0 \text{ cm}^2$

Trotz Ableseungenauigkeiten führt dieses Verfahren zu einem mit den Ergebnissen des Beispiels 3.2 nahezu übereinstimmenden Ergebnis.

### Beispiel 3.4 b: Biegebemessung mit Hilfe des dimensionslosen $\omega$ -Verfahrens

Gegeben: Aufgabenstellung gemäß Beispiel 3.3

Gesucht: - wie vor -

Bezogenes Biegemoment (dimensionslose Größe):

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{416,25 \cdot 10^{-3}}{0,35 \cdot 0,55^2 \cdot 14,2} = 0,2769 \leq 0,371 = \mu_{Eds, \text{lim}}$$

Ablesewerte (Begrenzung der Stahlspannung auf  $f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow$  horiz. Ast der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Linie):

$$\mu_{Eds} = 0,28 \rightarrow \omega_1 = \underline{0,3391}$$

$$\xi = \frac{x}{d} = \underline{0,419} \rightarrow x = 0,419 \cdot 0,55 = 0,23 \text{ m} = \underline{23 \text{ cm}}$$

$$\zeta = \frac{z}{d} = \underline{0,826} \rightarrow z = 0,826 \cdot 0,55 = 0,454 \text{ m} = \underline{45,4 \text{ cm}}$$

$$\varepsilon_{s1} = +4,86\text{‰} ; \quad \varepsilon_{c2} = -3,50\text{‰}$$

Erf. Bewehrung: 
$$\text{erf } A_{s1} = \frac{1}{f_{yd}} \cdot (\omega_1 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} + N_{Ed}) = \frac{1}{43,5} \cdot (0,3391 \cdot 35 \cdot 55 \cdot 14,2 + 0) = \underline{21,3 \text{ cm}^2}$$

Gewählt werden: 2Ø25 und 2Ø28 (in 1. Lage); vorh  $A_{s1} = 9,82 + 12,3 = \underline{22,12 \text{ cm}^2} > 21,3 \text{ cm}^2$

### Beispiel 3.4 c: Biegebemessung mit Hilfe des dimensionsgebundenen $k_d$ -Verfahrens

Gegeben: Aufgabenstellung gemäß Beispiel 3.3

Gesucht: - wie vor -

Hilfswert  $k_d$ : 
$$k_d = \frac{d[\text{cm}]}{\sqrt{\frac{M_{Eds}[\text{kNm}]}{b[\text{m}]}}} = \frac{55}{\sqrt{416,25/0,35}} = \underline{1,595}$$

Ablesewerte (für C25/30 in nachfolgender Zeile):

$$k_d = 1,58 \rightarrow k_s = \underline{2,79}$$

$$\xi = \frac{x}{d} = \underline{0,422} \rightarrow x = 0,422 \cdot 0,55 = 0,232 \text{ m} = \underline{23,2 \text{ cm}}$$

$$\zeta = \frac{z}{d} = \underline{0,824} \rightarrow z = 0,824 \cdot 0,55 = 0,453 \text{ m} = \underline{45,3 \text{ cm}}$$

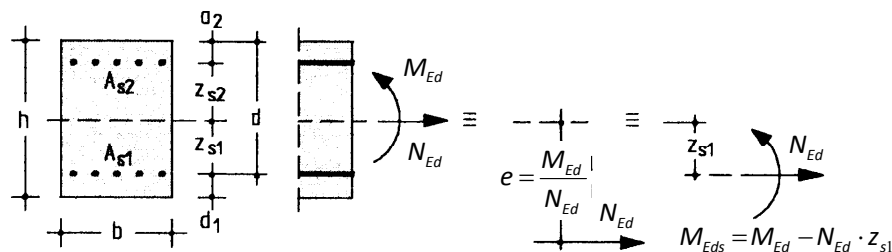
$$\varepsilon_{s1} = +4,79\text{‰} \quad ; \quad \varepsilon_{c2} = -3,50\text{‰}$$

Erf. Bewehrung: 
$$\text{erf } A_{s1} = k_s \cdot \frac{M_{Eds} [\text{kNm}]}{d [\text{cm}]} + \frac{N_{Ed} [\text{kN}]}{f_{yd}} = 2,79 \cdot \frac{416,25}{55} + \frac{0}{43,5} = \underline{21,1 \text{ cm}^2}$$

Gewählt werden: 2Ø25 und 2Ø28 (in 1. Lage); vorh  $A_{s1} = 9,82 + 12,3 = \underline{22,12 \text{ cm}^2} > 21,1 \text{ cm}^2$

### 3.5 Biegebemessung mit Längskraft

Wie bereits in Kap. 3.3 aufgeführt, werden das Biegemoment  $M$  und die Normalkraft  $N$  gemäß statischer Definition auf die Schwerachse des Querschnittes bezogen. Für die Bemessung müssen diese als „versetzte“ Schnittgrößen auf die Achse der Biegezugbewehrung (Längsbewehrung am stärker auf Zug beanspruchten Rand) bezogen werden (vgl. Bild 3.13).



**Bild 3.18:** Schnittgrößen in Schwerachse und „versetzte“ Schnittgrößen

Die Normalkraft ist vorzeichengerecht einzusetzen (Druckkraft negativ, Zugkraft positiv). Da  $N_{Ed}$  direkt auf die Zugbewehrung einwirkt, entsteht eine Entkoppelung zwischen Biegung und Längskraft. Somit ist folgender Ansatz gültig:

$$A_{s1,NEd} = \frac{N_{Ed}}{\sigma_{s1}} \cong \frac{N_{Ed}}{f_{yd}}$$

$$A_{s1,MEd} = \frac{1}{\sigma_{s1d}} \cdot \frac{M_{Eds}}{z} \cong \frac{M_{Ed,s}}{f_{yd} \cdot z}$$

$$A_{s1} = A_{s1,NEd} + A_{s1,MEd} = \frac{1}{\sigma_{s1d}} \cdot \left( \frac{M_{Eds}}{z} + N_{Ed} \right) \cong \frac{1}{f_{yd}} \cdot \left( \frac{M_{Eds}}{z} + N_{Ed} \right)$$

Eine Längszugkraft wird immer zu einer Vergrößerung, eine Längsdruckkraft zu einer Verminderung der erforderlichen Längsbewehrung führen. Eine Übersicht gibt die Tab. 3.3.

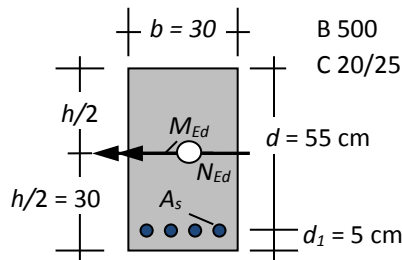
**Tabelle 3.3:** Wirkung der Längskraft auf Beton und Bewehrungsstahl

| Ursache durch zusätzliche      | Wirkung auf   |              |
|--------------------------------|---|--------------|
|                                | Beton   | Betonstahl   |
| ... Druckkraft: $N_{Ed} < 0,0$ | Zusätzliche Beanspruchung, da $M_{Eds}$ größer wird | Minderbedarf |
| ... Zugkraft: $N_{Ed} > 0,0$   | Entlastung, da $M_{Eds}$ kleiner wird               | Mehrbedarf   |

Alle in Kap. 3.4 vorgestellten Bemessungshilfen sind bereits für eine zusätzliche Einwirkung durch eine Längskraft ausgelegt.  $N_{Ed}$  muss lediglich bei der Berechnung von  $M_{Eds}$  und der Bestimmung von  $A_{s1}$  am Ende des Bemessungsprozesses berücksichtigt werden.

**Beispiel 3.5:** Bemessung für Biegung mit Längskraft (dimensionsloses  $\omega$ -Verfahrens)

Gegeben: Querschnitt:



Schnittgrößen aus statischer Berechnung:

$$M_{G,k} = 85,0 \text{ kNm}; \quad N_{G,k} = -50 \text{ kN (Druckkraft)}$$

$$M_{Q,k} = 60,0 \text{ kNm}; \quad N_{Q,k} = -40 \text{ kN (Druckkraft)}$$

Hinweis:

Begrenzung der Stahlspannung auf  $f_{td,cal}$  (geneigter Ast)

Gesucht: Nachweis im GZT, dass die Einwirkungen  $E_d$  die Tragfähigkeit  $R_d$  (hier der Tragwiderstand des Querschnittes bezüglich  $M$  und  $N$ ) nicht überschreitet.

Einwirkung  $E_d$ : ( $\gamma_F$ -fache Einwirkung; vgl. Tabl. 1.3)

$$M_{Ed} = 1,35 \cdot 85 + 1,50 \cdot 60 = + 204,75 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = - (1,35 \cdot 50 + 1,50 \cdot 40) = - 127,50 \text{ kN}$$

Auf die Bewehrungsachse bezogene Biegemoment:

$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} = 204,75 - (-127,5) \cdot 0,25 = + 236,63 \text{ kNm}$$

Bezogenes Biegemoment (dimensionslose Größe):

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{236,63 \cdot 10^{-3}}{0,30 \cdot 0,55^2 \cdot 11,3} = 0,230 \leq 0,371 = \mu_{Eds,lim}$$

Ablesewerte ( $f_{yt} = 45,65 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow$  ansteigender Ast der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie):

$$\mu_{Eds} = 0,230 \rightarrow \omega_1 = 0,2665$$

$$\xi = \frac{x}{d} = 0,329 \rightarrow x = 0,329 \cdot 0,55 = 0,181 \text{ m} = 18,1 \text{ cm}$$

$$\zeta = \frac{z}{d} = 0,863 \rightarrow z = 0,863 \cdot 0,55 = 0,475 \text{ m} = 47,5 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{s1} = +7,13\text{‰} ; \quad \epsilon_{c2} = -3,50\text{‰}$$

Erf. Bewehrung:  $erf A_{s1} = \frac{1}{\sigma_{s1d}} \cdot (\omega_1 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} + N_{Ed}) = \frac{1}{43,95} \cdot (0,2665 \cdot 30 \cdot 55 \cdot 11,3 - 127,5) = 8,41 \text{ cm}^2$

Gewählt:  $2\text{Ø}25$  (in 1. Lage); vorh  $A_{s1} = 9,82 \text{ cm}^2 > 8,41 \text{ cm}^2$

**3.5 Druckbewehrung bei hoher Biegebeanspruchung**

In Kap. 3.3 und 3.4 ist nur die „einfache“ Bewehrung (Längsbewehrung nur in der Zugzone des Querschnitts) behandelt worden. Bei zunehmender Beanspruchung kann es sinnvoll sein, die Biegedruckzone durch Stahleinlagen zu verstärken. Man spricht dann von einer Druckbewehrung oder „doppelter“ Bewehrung. Die Druckbewehrung ist aber nur dann sinnvoll, wenn bei unterschiedlichster Beanspruchung gleiche Balkenabmessungen gewünscht sind. Andere konstruktive Möglichkeiten bei höherer Biegebeanspruchung sind:

- Balkenhöhe vergrößern (größerer innerer Hebelarm  $z$ )
- Balkenbreite  $b$  in der Druckzone vergrößern
- höhere Betongüte wählen

Schaut man sich zunächst das allgemeine Bemessungsdiagramm (Bild 3.15) bei größer werdenden Werten von  $\mu_{Eds}$  an, so stellt man fest, dass:

- $\varepsilon_s$  zunächst konstant bleibt,
- der Hebelarm  $z = \zeta \cdot d$  kleiner wird,
- die Nulllinie nach unten wandert, die Druckzonenhöhe  $x$  also größer wird
- und der Stahlbedarf  $A_{s1}$  überproportional anwächst.
- Nach Erreichen der Grenzdehnung  $\varepsilon_{c2} = -3,5 \text{ ‰}$  nimmt die Stahldehnung  $\varepsilon_{s1}$  ab, da nur so die erforderliche Druckzonenhöhe  $x$  für die Aufnahme einer größeren Druckkraftresultierenden  $F_{cd}$  erreicht werden kann.
- Bei noch geringeren Stahldehnungen ( $\varepsilon_{s1} < 2,174 \text{ ‰} = \varepsilon_{yd}$ ) wird die Streckgrenze  $f_{yd}$  unterschritten ( $\sigma_{s1} < f_{yd}$ ), so dass der Bewehrungsstahl nicht mehr vollständig ausgenutzt wird.

Bei großen  $\mu_{Eds}$ -Werten haben also mehrere der aufgezählten Effekte Einfluss auf die überproportionale Steigerung der erforderlichen Zugbewehrung. Sie führen damit auf einen unwirtschaftlichen hohen Stahlverbrauch. Eine Grenze für die einfache Bemessung stellt die Forderung nach ausreichender Rotationsfähigkeit des Bauteils dar. Hierbei ist die Druckzonenhöhe begrenzt durch:

$$\zeta_{lim} = 0,450 \rightarrow \mu_{Eds,lim} = 0,296 \quad \text{für Beton der Festigkeitsklasse bis C 50/60}$$

Der zuvor ermittelte Grenzwert ist nur bei der linear-elastischen Ermittlung der Schnittgrößen ohne Momentenumlagerung anzuwenden. Bei einer begrenzten Umlagerung des Momentes ist die zulässige bezogene Druckzonenhöhe durch die zulässige Momentenumlagerung  $\delta$  festgelegt.

Aus wirtschaftlichen Gründen ( Ausnutzung der Streckgrenze der Bewehrung ) gilt für den Betonstahl B 500 außerdem der Grenzwert

$$\zeta_{lim} = \varepsilon_{cu2} / (\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{sy}) = -3,5 / (-3,5 - 2,174) = 0,617 \rightarrow \mu_{Eds,lim} = 0,371$$

Für höhere Betonfestigkeitsklassen (> C 50/60) ergeben sich aufgrund der verringerten Randstauchung  $\varepsilon_{cu2}$  deutlich kleinere Grenzwerte (vgl. Tab. 2.1).

Bei Anwendung des allgemeinen Bemessungsdiagramms wird das Gesamtmoment  $M_{Eds}$  aufgeteilt:

$$M_{Eds} = M_{Eds,lim} + \Delta M_{Eds} \quad \text{mit} \quad M_{Eds,lim} = \mu_{Eds,lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}$$

Das verbleibende Differenzmoment

$$\Delta M_{Eds} = M_{Eds} - M_{Eds,lim} = M_{Eds} - \mu_{Eds,lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}$$

wird allein durch die Stahleinlagen aufgenommen:

$$\Delta F_{s1} = \Delta M_{Eds} / (d - d_2) = -F_{s2}$$

Die erforderliche Zugbewehrung  $A_{s1}$  und die Druckbewehrung  $A_{s2}$  ergeben sich somit zu:

$$A_{s1} = (M_{Eds,lim} / z + \Delta M_{Eds} / (d - d_2) + N_{Eds}) / \sigma_{s1d} \quad \text{und} \quad A_{s2} = [\Delta M_{Eds} / (d - d_2)] / \sigma_{s2d}$$

Beim dimensionslosen  $\omega$ -Verfahren sind für  $\mu_{Eds} > \mu_{Eds,lim}$  zusätzliche Tabellen entwickelt worden; eine vorherige Aufteilung des bezogenen Bemessungsmomentes  $\mu_{Eds}$  ist nicht erforderlich. Als Eingangswert in die Tabelle wird  $\mu_{Eds}$  und das Verhältnis  $d_2/d$  benutzt. Mit den Tabellenwerten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ergeben sich die Bewehrungsanteile zu

$$A_{s1} = (\omega_1 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} + N_{Eds}) / \sigma_{s1d} \quad \text{und} \quad A_{s2} = \omega_2 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} / \sigma_{s2d}$$

Die entsprechenden Werte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind den einschlägigen Tabellenbüchern zu entnehmen.

Bei Anwendung des dimensionsbehafteten  $k_d$ -Verfahrens wird der Hilfwert  $k_d$  bei Überschreitung des Wertes für die bezogenen Druckzonenhöhe ( $\xi_{lim} = 0,45$ ; bei Normalbeton bis Festigkeitsklasse C 50/60) zu  $k_d^*$ . Ergibt also die Berechnung kleinere Werte als  $k_d^*$ , dann sollte – sofern nicht andere konstruktive Maßnahmen möglich sind – eine Druckbewehrung vorgesehen werden. Auf die Herleitung der Formeln für das  $k_d$ -Verfahren mit Druckbewehrung soll hier verzichtet werden (vgl. hierzu z.B. Betonkalender).

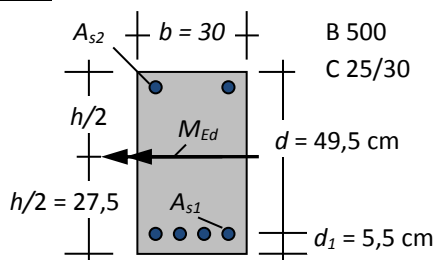
Die erforderliche Bewehrung ergibt sich aus

$$A_{s1} = (\rho_1 \cdot k_{s1} \cdot M_{Eds} / d + N_{Ed}) / f_{yd} \quad \text{und} \quad A_{s2} = (\rho_2 \cdot k_{s2} \cdot M_{Eds} / d) / f_{yd}$$

Die Lage der Druckbewehrung, ausgedrückt durch das Verhältnis  $d_2/h$ , spiegelt sich in den Vorfaktoren  $\rho_1$  bzw.  $\rho_2$  wieder.  $k_{s1}$  wird mit abfallenden  $k_d < k_d^*$  wieder kleiner.  $F_{cd}$  und  $F_{s1d,1}$  wirken als Kräftepaar mit  $z = \xi^* \cdot d$  und das zusätzliche Moment  $\Delta M_{Eds}$  wird durch die Kräfte  $F_{s1d,2}$  und  $F_{s2d}$  mit dem größeren Hebelarm  $d - d_2$  aufgenommen. Je größer der Anteil des zweiten Kräftepaares ist, desto größer ist der gemeinsame Hebelarm. Dieses drückt sich durch den fallenden  $k_{s1}$ -Wert aus. Der  $k_{s2}$ -Wert hingegen steigt bei gleichzeitiger Erhöhung der Beanspruchung stetig an.

**Beispiel 3.6:** Bemessungsbeispiel für „doppelte“ Bewehrung (dimensionsloses  $\omega$ -Verfahren)

Gegeben: Querschnitt:



Schnittgrößen aus statischer Berechnung:

$$M_{G,k} = 200,0 \text{ kNm}$$

$$M_{Q,k} = 153,3 \text{ kNm}$$

Hinweis:

Begrenzung der Stahlspannung auf  $f_{td,cal}$  (geneigter Ast)

Gesucht: Nachweis im GZT, dass die Einwirkungen  $E_d$  die Tragfähigkeit  $R_d$  (hier der Tragwiderstand des Querschnittes bezüglich  $M_{Ed}$ ) nicht überschreitet.

Einwirkung  $E_d$ : ( $\gamma_F$ -fache Einwirkung; vgl. Tabl. 1.3)

$$M_{Ed} = 1,35 \cdot 200 + 1,50 \cdot 153,3 = + \underline{500,0 \text{ kNm}}$$

Auf die Bewehrungsachse bezogene Biegemoment:

$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} = 500,0 - 0 = + \underline{500,0 \text{ kNm}}$$

Bezogenes Biegemoment (dimensionslose Größe):

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{500,0 \cdot 10^{-3}}{0,30 \cdot 0,495^2 \cdot 14,2} = 0,479 > 0,371 = \mu_{Eds,lim} \quad \text{mit} \quad \xi_{lim} = (x/d)_{lim} = 0,617$$

**Hinweis:** Wird die Druckzonenhöhe allein aus wirtschaftlichen Gründen auf  $\xi_{lim} = 0,617$  begrenzt, so wird der Dehnungszustand bei  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{yd} = 2,174 \text{ ‰}$  und  $\varepsilon_{c2} = -3,5 \text{ ‰}$  „eingefroren“, um den Bewehrungsstahl auf der Zugseite weiterhin bis zur Streckgrenze  $f_{yd}$  ausnutzen zu können. Das dazugehörige Moment ergibt sich aus:

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \mu_{Eds,lim} \rightarrow M_{Eds,lim} = \mu_{Eds,lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,371 \cdot 0,3 \cdot 49,5^2 \cdot 1,42 = 387,3 \text{ kNm}$$

Als verbleibendes  $\Delta M_{Eds}$  errechnet sich:

$$\Delta M_{Eds} = M_{Eds} - M_{Eds,lim} = 500,0 - 387,3 = 112,7 \text{ kNm}$$

welches über das Kräftepaar  $F_{s2d}$  (Druckkraft in der Druckbewehrung) und  $F_{s1d,2}$  (Zugkraft in der zusätzlichen Bewehrung in der Zugzone des Querschnitts) aufgenommen werden muss.

Da die Bemessung mit Hilfe des dimensionslosen  $\omega$ -Verfahrens durchgeführt werden soll, werden die entsprechenden Ergänzungstabellen für das Ablesen der Beiwerte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  herangezogen (hier die interpolierten Werte für das Verhältnis  $d_2/d = 5,5/49,5 \approx 0,10$  und die Begrenzung auf  $\xi_{lim} = 0,617$ ):

$$\omega_1 = 0,6184 \quad ; \quad \omega_2 = 0,1199$$

Erf. Bewehrung:

$$erf A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d}{\sigma_{s1d} / f_{cd}} + \frac{N_{Ed}}{\sigma_{s1d}} = 0,6184 \cdot \frac{30 \cdot 49,5}{43,5/1,42} + \frac{0}{43,48} = 30,0 \text{ cm}^2$$

$$erf A_{s2} = \omega_2 \frac{b \cdot d}{\sigma_{s2d} / f_{cd}} = 0,1199 \cdot \frac{30 \cdot 49,5}{43,55/1,42} = 5,81 \text{ cm}^2$$

**Hinweis:** Muss die Druckzonenhöhe aus konstruktiven Gründen (ausreichende Rotationsfähigkeit) auf  $\xi_{lim} = 0,450$  begrenzt werden, so wird der Dehnungszustand bereits bei  $\varepsilon_{s1} = +4,28 \text{ ‰}$  und  $\varepsilon_{c2} = -3,5 \text{ ‰}$  „eingefroren“. Das dazugehörige Moment ergibt sich aus:

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \mu_{Eds,lim} \rightarrow M_{Eds,lim} = \mu_{Eds,lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 0,296 \cdot 0,3 \cdot 49,5^2 \cdot 1,42 = 309,0 \text{ kNm}$$

Die entsprechenden Ergänzungstabellen des dimensionslosen  $\omega$ -Verfahrens liefern die Beiwerte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  (hier die interpolierten Werte für das Verhältnis  $d_2/d = 5,5 \text{ cm}/49,5 \text{ cm} \approx 0,10$  und die Begrenzung auf  $\xi_{lim} = 0,450$ ):

$$\omega_1 = 0,5679 \quad ; \quad \omega_2 = 0,2029$$

Erf. Bewehrung:

$$erf A_{s1} = \omega_1 \frac{b \cdot d}{\sigma_{s1d} / f_{cd}} + \frac{N_{Ed}}{\sigma_{s1d}} = 0,5679 \cdot \frac{30 \cdot 49,5}{43,68/1,42} + \frac{0}{43,68} = 27,42 \text{ cm}^2$$

$$erf A_{s2} = \omega_2 \frac{b \cdot d}{\sigma_{s2d} / f_{cd}} = 0,2024 \cdot \frac{30 \cdot 49,5}{43,53/1,42} = 9,84 \text{ cm}^2$$

Gewählt: unten  $5 \text{ } \varnothing 28$  mit vorh  $A_{s1} = 30,79 \text{ cm}^2 > 27,42 \text{ cm}^2$   
 oben  $2 \text{ } \varnothing 20 + 1 \text{ } \varnothing 25$  mit vorh  $A_{s2} = 6,28 + 4,91 = 11,19 \text{ cm}^2 > 9,84 \text{ cm}^2$

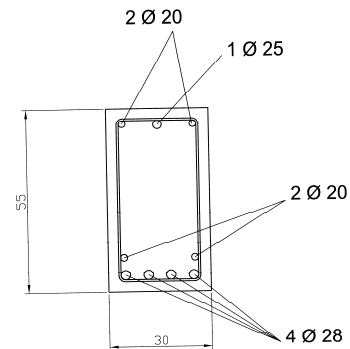
Problem:  $5 \text{ } \varnothing 28$  passen nicht in eine Lage, so dass die untere Bewehrung in zwei Lagen verlegt werden muss und damit die statische Nutzhöhe  $d$  kleiner wird.



Gewählt: unten  $4\varnothing 28 + 2\varnothing 20$  mit vorh  $A_{s1} = 24,6 + 6,28 = 30,88 \text{ cm}^2 > 27,42 \text{ cm}^2$   
 oben  $2\varnothing 20 + 1\varnothing 25$  mit vorh  $A_{s2} = 6,28 + 4,91 = 11,19 \text{ cm}^2 > 9,84 \text{ cm}^2$

mit  $d_{neu} = (24,6 \cdot 49,5 + 6,28 \cdot 44) / 30,88 = 48,2 \text{ cm}$

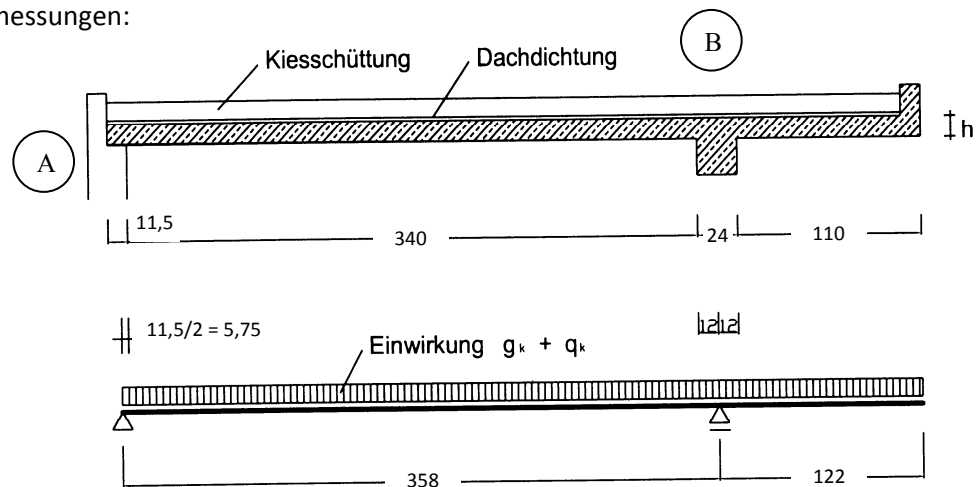
Auf eine Neubemessung mit reduzierter Nutzhöhe wird im Rahmen dieses Beispiels verzichtet. Der Mehrbedarf wird durch die gewählte Bewehrungsmenge abgedeckt.



**3.6 Vergleich an einem Beispiel: Handrechnung / Bemessungsprogramm**

Gegeben ist die Decke eines Wartehäuschens mit  $h = 13 \text{ cm}$ . Sie ist einachsig gespannt und krägt 1,10 m über den Randbalken hinaus. Als Beton kommt ein C25/30 zum Einsatz. Als Bewehrung werden Matten gewählt (B500 mit  $d_{s,l} < 10 \text{ mm}$ ). Die geringe Neigung für den Abfluss des Regenwassers wird bei der Berechnung vernachlässigt.

- System und Abmessungen:



- Betondeckung / Nutzhöhe:

Expositionsklasse: XC3 (Außenbauteil); Mindestbetonfestigkeitskl. C 20/25 < C25/30

$$c_{min} = \max \{ c_{min,b}; c_{min,dur} + \Delta c_{dur,\gamma} - \Delta c_{dur,st} - \Delta c_{dur,add}; 10 \text{ mm} \}$$

$$c_{min} = \max \{ \leq 10; 20 + 0 - 0 - 0; 10 \text{ mm} \} = \underline{20 \text{ mm}}$$

Mit  $\Delta c_{dev} = 15 \text{ mm}$  ergibt sich als nominale Betondeckung:  $c_v = c_{nom} = \underline{35 \text{ mm}}$

Nutzhöhe:  $\text{erf } d = h - c_v - d_{s,l}/2 = 13,0 - 3,5 - 1,0/2 = \underline{9,0 \text{ cm}}$

- Einwirkungen:

Eigengewicht  $h \cdot \gamma_{Beton} = 0,13 \cdot 25,0 = 3,25 \text{ kN/m}^2$

|  |       |                                |
|--|-------|--------------------------------|
| Abdichtung zweilagig einschl. Klebmasse: | =     | 0,15 kN/m <sup>2</sup>         |
| Kiesschüttung: 5cm +/- 10 %              | =     | 1,10 kN/m <sup>2</sup>         |
|  | $g_k$ | = <u>4,50 kN/m<sup>2</sup></u> |
| Schneelast                               | $s$   | = 0,75 kN/m <sup>2</sup>       |
|  | $q_k$ | = <u>0,75 kN/m<sup>2</sup></u> |

Die Aufkantung wird vereinfachend vernachlässigt. Die Bemessungslasten ergeben sich aus:

$$g_d = \gamma_G \cdot g_k = 1,35 \cdot 4,50 = \underline{6,075 \text{ kN/m}^2}$$

$$q_d = \gamma_Q \cdot q_k = 1,50 \cdot 0,75 = \underline{1,125 \text{ kN/m}^2}$$

• **Schnittgrößen:**

Die einachsige gespannte Platte wird wie ein Balken mit 1,00 m Breite gerechnet. Schnee wird als Volllast angesetzt.

$$\begin{aligned} \max m_{Ed,F} &= (g_d + q_d) \cdot (l^2 - c^2)^2 / (8 \cdot l^2) \\ &= (6,075 + 1,125) \cdot (3,58^2 - 1,22^2)^2 / (8 \cdot 3,58^2) = + \underline{9,01 \text{ kNm/m}} \end{aligned}$$

$$\min m_{Ed,B} = - (6,075 + 1,125) \cdot 1,22^2 / 2 = - \underline{5,36 \text{ kNm/m}}$$

$$A_{Ed} = (6,075 + 1,125) \cdot (3,58^2 - 1,22^2) / (2 \cdot 3,58) = + \underline{11,39 \text{ kN/m}}$$

$$B_{Ed} = (6,075 + 1,125) \cdot (3,58 + 1,22) - 11,39 = + \underline{23,17 \text{ kN/m}}$$

$$V_{Ed,B,rechts} = (6,075 + 1,125) \cdot 1,22 = + \underline{8,78 \text{ kN/m}}$$

$$V_{Ed,B,links} = 8,78 - 23,17 = - \underline{14,39 \text{ kN/m}}$$

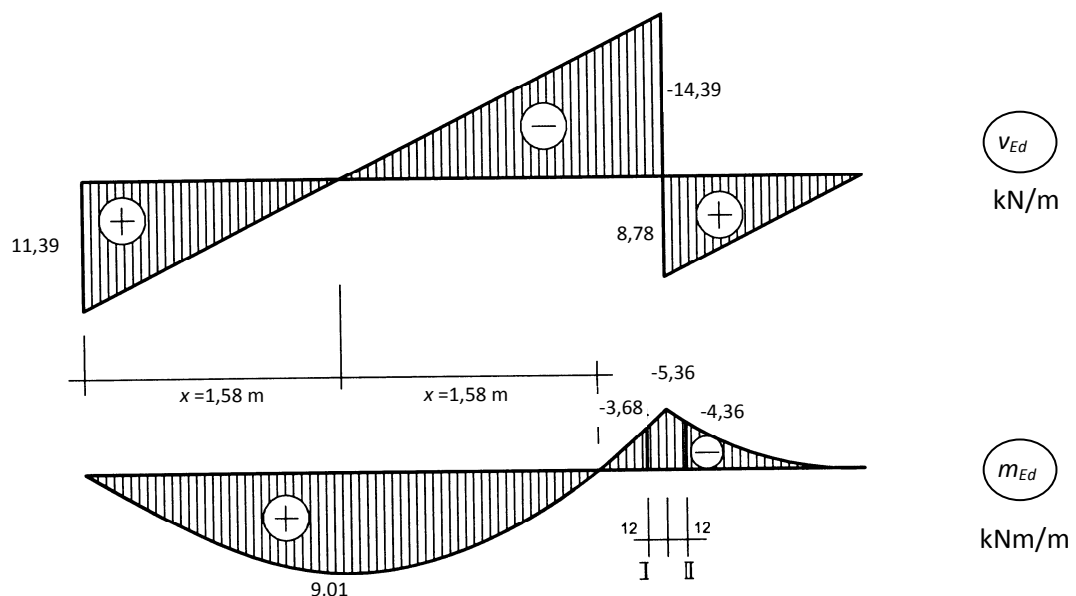
$$x (v_{Ed} = 0) = A_{Ed} / (g_d + q_d) = 11,39 / 7,20 = \underline{1,58 \text{ m}}$$

$$x (m_{Ed} = 0) = 2 \cdot A_{Ed} / (g_d + q_d) = 2 \cdot 1,58 = \underline{3,16 \text{ m}}$$

Biegesteifer Anschluss der Platte an den Unterzug (→ Anschnittsmomente):

$$m_{Ed,B}^I \cong -5,36 + 14,39 \cdot 0,12 = - \underline{3,63 \text{ kNm/m}}$$

$$m_{Ed,B}^{II} \cong -5,36 + 8,78 \cdot 0,12 = - \underline{4,31 \text{ kNm/m}}$$



- Bemessung mit dem dimensionslosen  $\omega$ -Verfahren (ohne Verfestigung):

$$\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{m_{Eds}}{d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{9,01}{9,0^2 \cdot 1,42} = 0,078$$

im Feld: →  $\omega_1 = 0,0814$

Feldbewehrung:  $erf a_s = \omega_1 \cdot \frac{b \cdot d}{f_{yd} / f_{cd}} = 0,0814 \cdot \frac{100 \cdot 9}{43,5 / 1,42} = 2,39 \text{ cm}^2 / \text{m}$

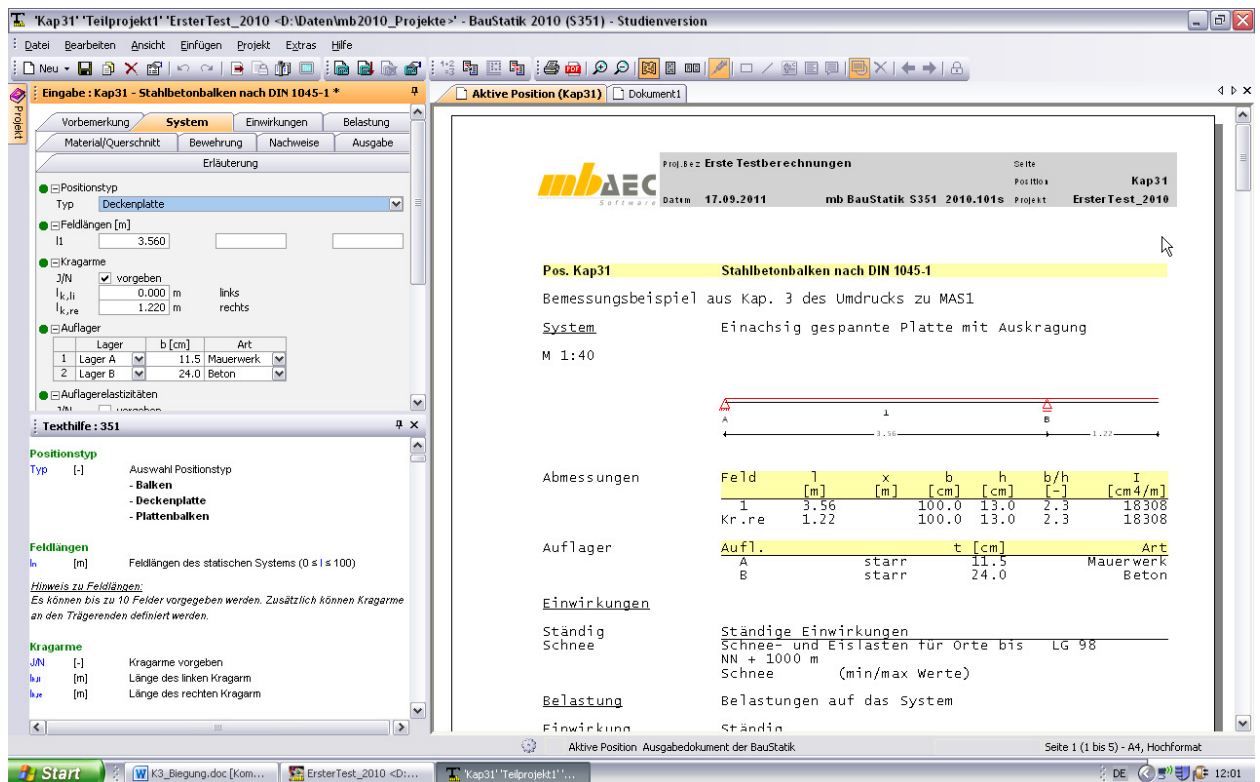
gewählt: R257 A vorh  $a_s = 2,57 \text{ cm}^2/\text{m} > 2,39 \text{ cm}^2/\text{m}$

über der Stützung:  $\mu_{Eds} = \frac{m_{Eds}}{d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{4,31}{9,0^2 \cdot 1,42} = 0,0375 \rightarrow \omega_1 = 0,0375$

Stützbewehrung:  $erf a_s = 0,0375 \cdot \frac{100 \cdot 9}{43,5 / 1,42} = 1,1 \text{ cm}^2 / \text{m}$

gewählt: R188 A vorh  $a_s = 1,88 \text{ cm}^2/\text{m} > 1,14 \text{ cm}^2/\text{m}$  (Mindestbew. beachten)

Im Rahmen einer EDV-Laborübung wird das Programmpaket Ing<sup>+</sup> 2014 -Projektmanager des Unternehmens **mb-aec** vorgestellt. Die Deckenplatte wird modelliert, die Schnittgrößen ermittelt und auf Biegung bemessen. Die Ergebnisse des Programms werden analysiert, kritisch hinterfragt und mit denen der Handrechnung verglichen.



**Bild 3.19:** Screenshot der Programmoberfläche Ing<sup>+</sup> 2017