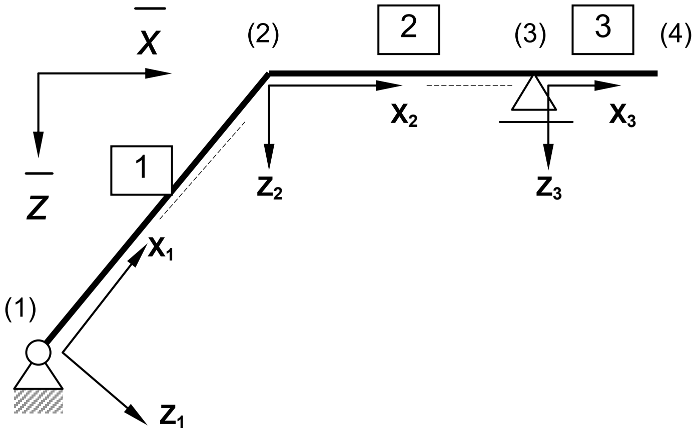
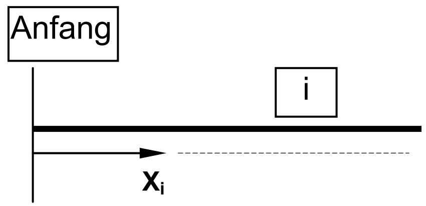
6. Schnittgrößenermittlung bei ebenen und statisch bestimmten Stabtragwerken

6.1 Globale und lokale Bezugskoordinatensysteme

Stabtragwerke setzen sich nicht immer nur aus horizontalen oder vertikalen Stäben zusammen. Es gibt immer wieder Schrägstäbe, die für die Aussteifung der Tragkonstruktion notwendig sind oder rein aus architektonischen oder bautechnisch notwendigen Gründen mit einer Neigung ausgeführt werden (z. B. der Treppenlauf, die Diagonalen in einem Fachwerkbinder).

Stoßen z.B. zwei Stäbe unter verschiedenen Winkeln aufeinander, so reicht ein einzelnes **globales** Koordinatensystem mit einer horizontalen x-Achse und einer vertikalen z-Achse (zum Erdmittelpunkt hin ausgerichtet) nicht mehr aus. Da die Schnittgrößen immer achsbezogene Größen sind, müssen für jeden Stab **lokale** Koordinatensysteme eingeführt werden. Die lokale x-Achse zeigt immer in Längsrichtung des betrachteten Stabes und liegt mit ihrem Ursprung am Anfangspunkt des Stabes in Höhe der Stabachse (Schwerpunktachse). Quer zur Stabachse wird die lokale z-Achse abgetragen (bitte nebenstehenden Hinweis beachten). Durch das lokale System wird die Ausrichtung des Stabes definiert. Damit ergeben sich auch die Lage der positiven Faser und die Vorzeichen der Schnittufer. Lokale Koordinatensysteme liegen immer an dem Systemknoten, an dem der betrachtete Stab beginnt.





Hinweis: Wir setzen stillschweigend voraus, dass sich bei einem Stabwerk um ein **ebenes Stabwerk**, beispielsweise in der x-z-Ebene handelt.

In den nachfolgenden Kapiteln werden auch räumliche Stabtragwerke betrachtet, so dass auch die globale y-Achse mit ins Spiel kommt. Bei derartigen Systemen gibt es dann auch lokale x-, y- und z-Achsen.

In der nebenstehenden Abbildung zeigt die globale und lokale y-Achse aus der Blattebene heraus.

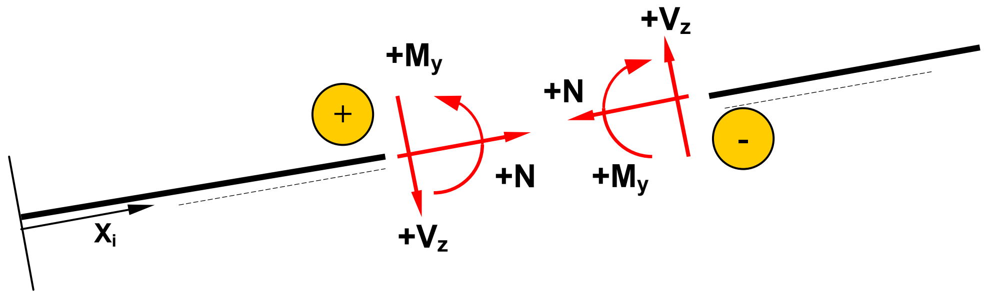
Globale Achsen sollen im Nachfolgenden als Dach-Größe dargestellt werden.

Zur Erinnerung:

Knoten:
- am Stabanfang oder Stabende;
- bei End- und Zwischenauflagern;
- in den Lasteinleitungspunkten von Einzellasten (Einzellasten sind i.d.R. Knotenlasten);
- am Anfang und Ende einer Streckenlast (Streckenlasten sind Stablasten);
- am Übergang von einem Querschnitt in einen anderen (Sprung bei EI bzw. EA);
- an Verzweigungspunkten (am Knoten treffen mehr als zwei Stäbe zusammen);
- an Knickpunkten im System (die Stabachse ändern ihre Richtung);
- an Gelenken innerhalb des Systems;
- an allen weiteren Punkten, die für die statische Berechnung notwendig werden.

a) Schnittgrößen (im lokalen System!)

Schnittgrößen sind Spannungsresultierende und beschreiben den Spannungszustand an einem beliebigen Schnitt quer zur Stabachse. Deshalb sind Schnittgrößen (N, V_z und M_y) immer Zustandsgrößen, die sich auf die jeweilige (lokale) Stabachse beziehen. Das nachfolgende Bild zeigt die übliche Vorzeichendefinition der Stabschnittgrößen:



In einem abgeknickten Träger sind (am Knickpunkt betrachtet) $V_{z,\,links}$ mit $V_{z,rechts}$ sowie N_{links} mit N_{rechts} nicht identisch. Dazu nachfolgendes Rechenbeispiel:

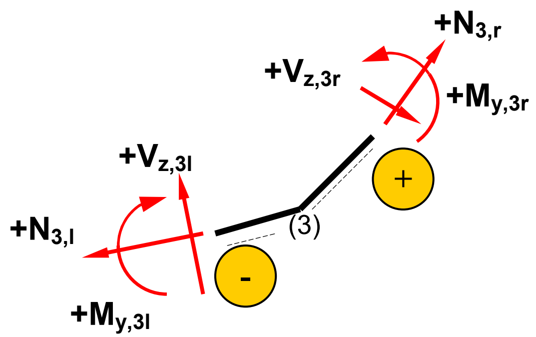
Hinweis: Ein positives Biegemoment erzeugt am positiven Schnittufer eine positive Spannung in der positiven Faser; und zwar unabhängig von der Ausrichtung der Stabachse.

Beispiel 1:

Gegeben sind die Schnittgrößen links vom Knoten 3:

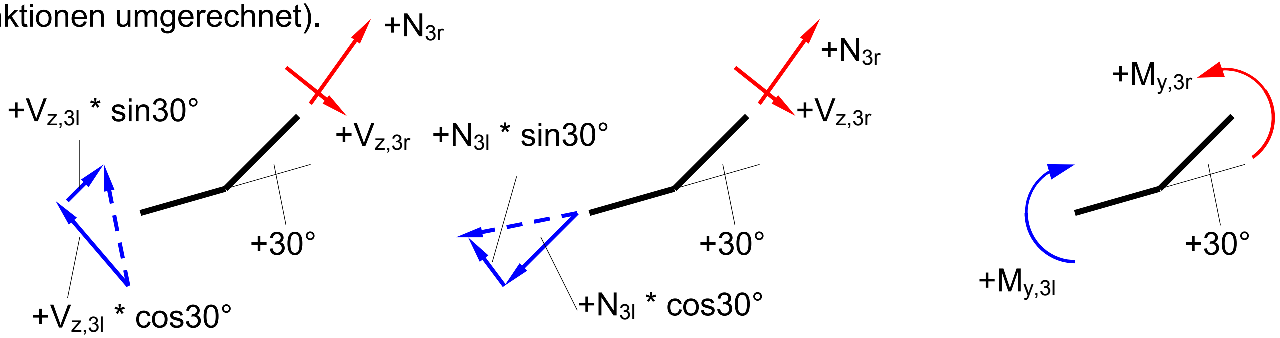
$N_{3,l}$ = +48 kN; $V_{z3,l}$ = +24 kN und $M_{y3,l}$ = -200 kNm.

Welche Werte weisen die entsprechenden Schnittgrößen rechts vom Knoten 3 auf? Im Knoten 3 treffen zwei Stäbe unter dem Winkel von 30° aufeinander.



Rechnung:

Die unbekannten Schnittgrößen liegen rechts vom Knoten 3. Die bekannten Schnittgrößen links vom Knoten 3 werden auf das lokale Koordinatensystem des rechten Stabes transformiert (durch Winkelfunktionen umgerechnet).



Die unbekannten Schnittgrößen rechts vom Knoten 3 können nun über Gleichgewichtsbedingungen auf der Basis des **Rundschnittverfahrens** bestimmt werden; aus $\Sigma K_{//} = 0$ und $\Sigma K_{\perp} = 0$ mit Bezug auf den rechten Stab sowie $\Sigma M_y = 0$ folgt::

$$\left.\begin{array}{l} +N_{3r} + Q_{z,3l} \cdot \sin 30° - N_{3l} \cdot \cos 30° = 0 \\ +Q_{z,3r} - N_{3l} \cdot \sin 30° - Q_{z,3l} \cdot \cos 30° = 0 \\ +M_{y,3r} - M_{y,3l} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} +N_{3r} = +N_{3l} \cdot \cos 30° - Q_{z,3l} \cdot \sin 30° \\ +Q_{z,3r} = +N_{3l} \cdot \sin 30° + Q_{z,3l} \cdot \cos 30° \\ +M_{y,3r} = +M_{y,3l} \end{array}$$

Hinweis: Die direkte Umrechnung der Schnittgrößen von „links“ nach „rechts“ setzt voraus, dass im Knoten 3 keine Punktlasten (Einzelkraft oder Lastmoment) angreifen. Sollten Punktlasten vorkommen, so müssen diese bei den Gleichgewichtsgleichungen mit erfasst werden.

In **Matrizenschreibweise** kann man diese drei Gleichungen zu einer Matrizengleichung zusammenfassen:

$$\bar{k}_r = \bar{T}_{rl} \cdot \bar{k}_l + \cancel{\bar{k}_{Knoten}}$$

In ausgeschriebener Form für unser Beispiel also:

$$\begin{Bmatrix} N_{3r} \\ Q_{z,3r} \\ M_{y,3r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{3l} \\ Q_{z,3l} \\ M_{y,3l} \end{Bmatrix}$$

Die Auswertung der Gleichungen führt auf folgendes Ergebnis:

$$+N_{3r} = \cos 30° \cdot 48{,}0 - \sin 30° \cdot 24{,}0 + 0 \cdot (-200) = 29{,}56\,kN$$

$$+Q_{z,3r} = \sin 30° \cdot 48{,}0 + \cos 30° \cdot 24{,}0 + 0 \cdot (-200) = 44{,}78\,kN$$

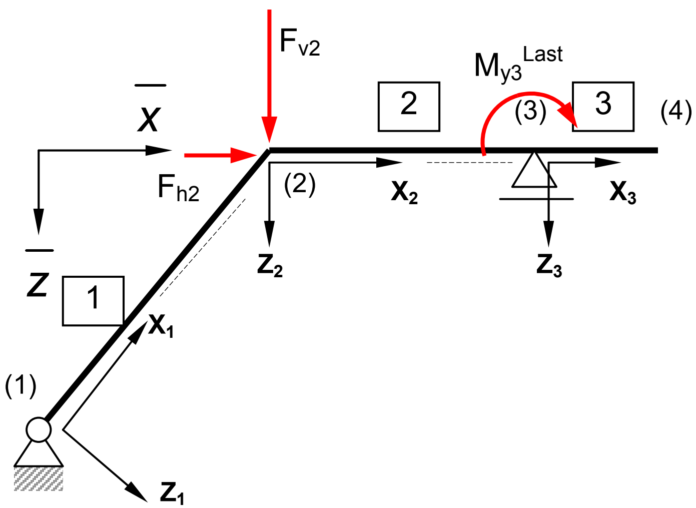
$$+M_{y,3r} = 0 \cdot 48{,}0 + 0 \cdot 24{,}0 + 1 \cdot (-200) = -200\,kNm$$

---

b) Einzellasten (Knotenlasten) und Streckenlasten (Stablasten)

Lastgrößen können unabhängig von ihrer Wirkungsrichtung im globalen oder in einem der lokalen Koordinatensysteme beschrieben werden.

Einzellasten sind **Punktlasten**. An ihrem Angriffspunkt ist i.d.R. ein Systemknoten definiert, so dass diese auch als **Knotenlasten** bezeichnet werden können. Da Systemknoten keine ausgeprägte Richtung aufweisen, werden Knotenlasten im Regelfall im globalen Koordinatensystem beschrieben. Eine schräg angreifende Einzellast wird entweder in eine vertikale und horizontale Kraftkomponente zerlegt oder als Kraftgröße

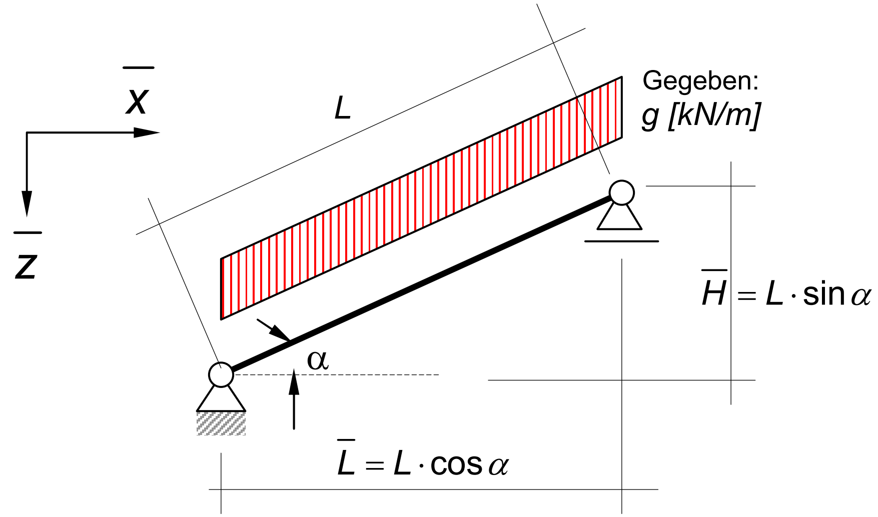


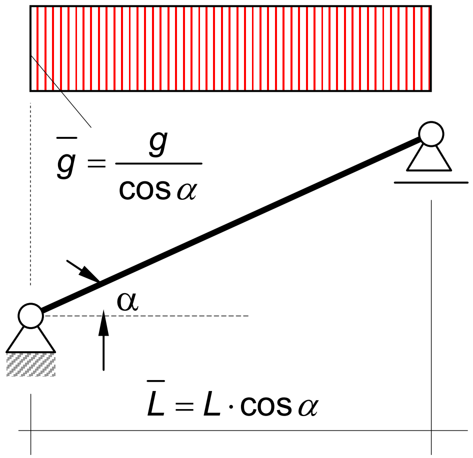
Hinweis: Die Matrizenschreibweise ist eine elegante „Kurzdarstellung“ mehrerer gleichartiger Gleichungen in einer einzigen Zeile. Kleine Buchstaben stehen für Vektoren (einspaltige Matrizen); große Buchstaben für (mehrspaltige) Matrizen. Die Transformationsmatrix **T** ist quadratisch; d.h. sie besitzt genauso viele Zeilen wie Spalten.

mit Angabe des Winkels zwischen Wirkungslinie und der globalen x-Achse beschrieben. Die heutigen Statik-Programme bieten deshalb unterschiedliche Methoden zur Modellierung der Lasten an.

Streckenlasten (in kN/m) sind **Stablasten**. Da Stäbe eine ausgeprägte Richtung aufweisen und somit auch ein eigenes lokales Koordinatensystem besitzen, werden Streckenlasten meist im lokalen System definiert. Leider kümmert sich die Schwerkraft oder der Schneefall nicht darum, welche Ausrichtung der Stab besitzt. Es sind deshalb „Umrechnungen“ mit Winkelfunktionen erforderlich.

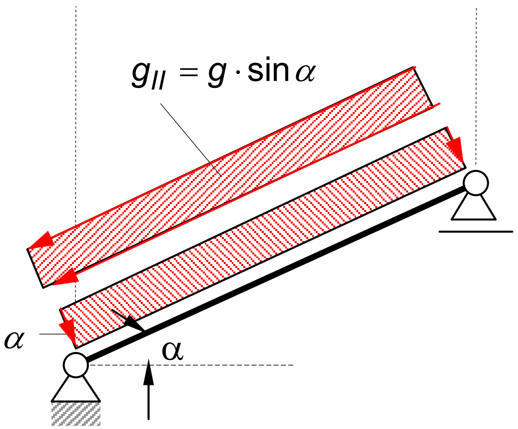
Eigengewichtslasten:





Bei Beschreibung des Eigengewichts im globalen Systems muss die über die wahre Länge L einwirkende Last auf die auf den Grundriss projezierte Länge $\bar{L}$ umgerechnet werden. Bei Eingabe im lokalen System muss das Eigengewicht in eine stabparallele (II) **und** eine senkrecht (⊥) zur Stabachse stehende Komponente umgerechnet werden.

Bei Statik-Programmen kann optional festgelegt werden, ob die Streckenlast g im globalen oder im lokalen System modelliert werden soll.



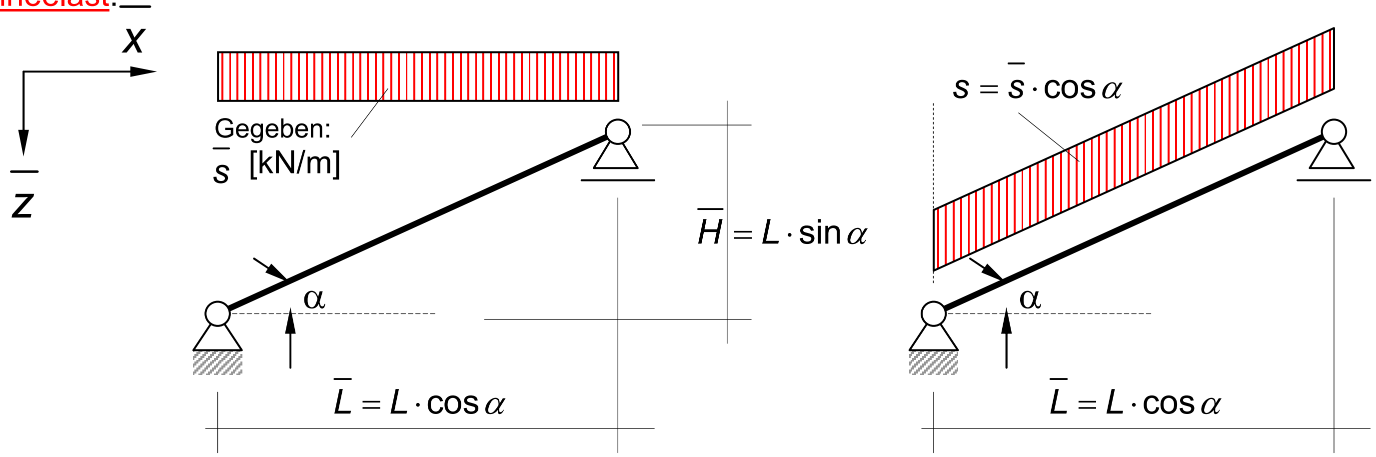
Hinweis: Das Eigengewicht errechnet sich aus:

$$g = \gamma_{Material} \cdot A_{Querschnitt}$$
$$= \gamma_{Material} \cdot b \cdot d$$

b = Breite des Stabprofils; d = Dicke (Höhe) des Profils senkrecht zur Stabachse gemessen.

γ_{Beton} = 23,0 kN/m³;
γ_{Wasser} = 10,0 kN/m³;
γ_{Stahl} = 78,5 kN/m³;
γ_{Holz} = 5,0 - 9,0 kN/m³;

Schneelast:



Bei Eingabe der Schneelast im lokalen System muss in eine stabparallele (II) **und** eine senkrecht (⊥) zur Stabachse stehende Komponente umgerechnet werden (vgl. Bilder auf Seite 6-5 unten und nebenstehende Formeln).

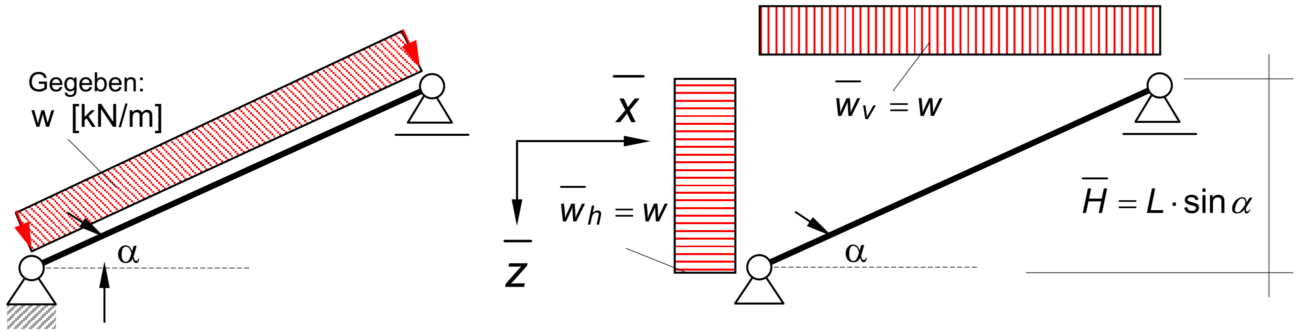
$$s_{\perp} = \bar{s} \cdot \cos^2\alpha$$

$$s_{II} = \bar{s} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

Windlast:

Windlasten wirken wegen der fehlenden Reibung zwischen den Gasmolekülen immer senkrecht auf Bauwerksteile. Es bietet sich daher an, Windlasten immer im lokalen System zu beschreiben. Im globalen System ist eine gleich große horizontale **und** vertikale Streckenlast anzusetzen.

:



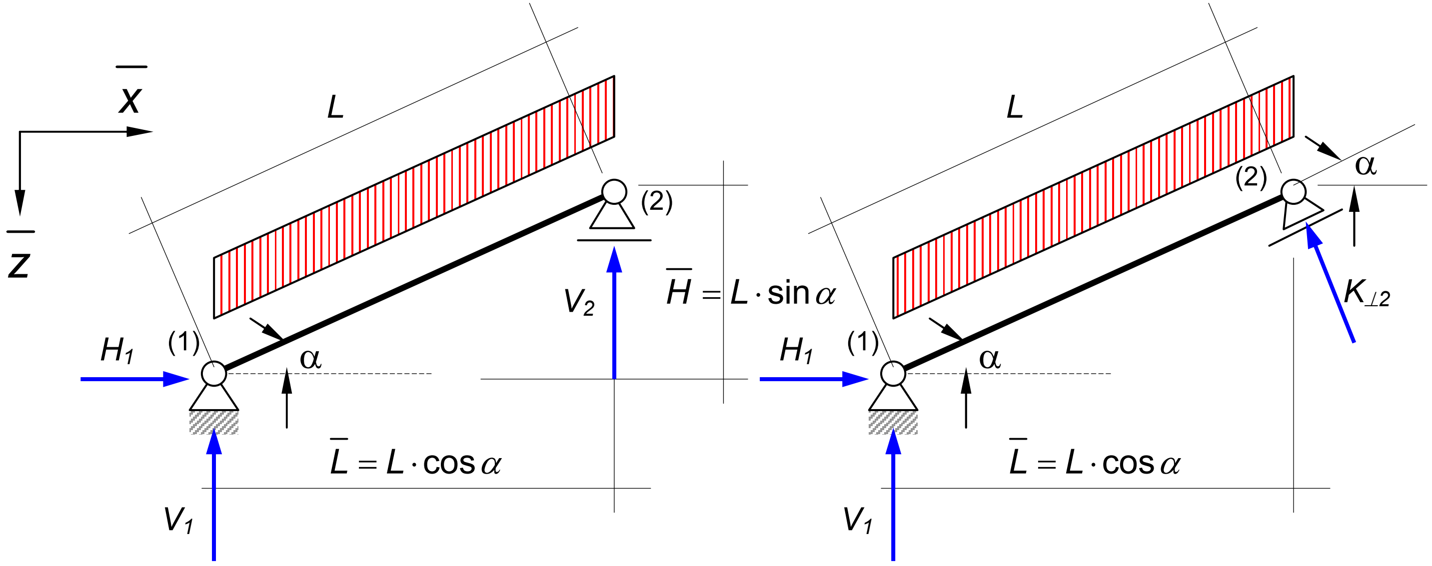
Hinweis: Die Schneelasten werden in der DIN1055-5 geregelt. In Abhängigkeit von der Schneelastzone werden Regelschneelasten definiert. Sie beziehen sich auf die Grundfläche eines Gebäudes.

Typischer Wert für Niedersachsen:

$\bar{s}$ = 0,75 kN/m²

c) Auflagerreaktionen (i.d.R. im globalen System)

Die Auflagerreaktionen sind Kraftgrößen an einem Systemknoten und werden meist im globalen Koordinatensystem definiert und berechnet. Eine Besonderheit bildet das einwertige Auflager, das das Tragwerk unter einem (meist von der Horizontalen abgetragenen) vorgegebenen Winkel stützt.



Treffen mehrere Stäbe mit unterschiedlichen Neigungen am Auflagerpunkt zusammen, so entscheidet man sich schon zwangsläufig für die globalen Achsen, wenn es um die Vorzeichendefinition und die Berechnung der Auflagerkräfte geht.

Bei der Handrechnung werden im Regelfall die Auflagerreaktionen zuerst berechnet. Die Schnittgrößen des am Auflagerpunkt angeschlossenen Stabendes müssen im Falle einer Neigung ungleich Null bzw. ungleich 90° durch Winkelfunktionen genau umgerechnet werden. Dazu nachfolgendes Rechenbeispiel:

Beispiel 2: Gewählt wird das auf dieser Seite abgebildete rechte System mit L = 5,0 m. Der Winkel α beträgt 36,87°. Die Eigengewichtslinienlast g soll mit 12 kN/m angesetzt werden.

Hinweis: Die beiden nebenstehenden Systeme weisen wegen des geneigten Auflagers im Knoten 2 verschiedenen Schnittgrößenverläufe auf. Bitte nachrechnen mit „Ruckzuck“ (oder RStab oder D.I.E. oder auch mb-AEC)

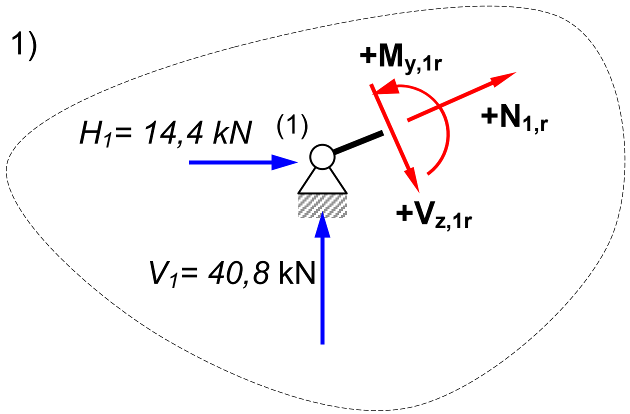
Rechnung (zunächst die Auflagerreaktionen): Es gilt: cos α = 0,8; sin α = 0,6

$$\sum \overleftarrow{M}_{y(1)} = 0: \quad +K_{\perp,2} \cdot 5{,}0 - 12{,}0 * 5{,}0 * 2{,}0 = 0 \quad \rightarrow K_{\perp,2} = +24{,}0\,kN$$

$$\overrightarrow{\sum H} = 0: \quad -K_{\perp,2} \cdot \sin\alpha + H_1 = 0 \quad \rightarrow H_1 = +14{,}4\,kN$$

$$\downarrow \sum V = 0: \quad -K_{\perp,2} \cdot \cos\alpha - V_1 + 12 \cdot 5 = 0 \quad \rightarrow V_1 = +40{,}8\,kN$$

Schnittgrößen: (zunächst am Stabanfang am Knoten 1)



$$\sum \overleftarrow{M}_{y(1)} = 0: \quad Anschauung \rightarrow M_{y,1r} = 0\,kNm$$

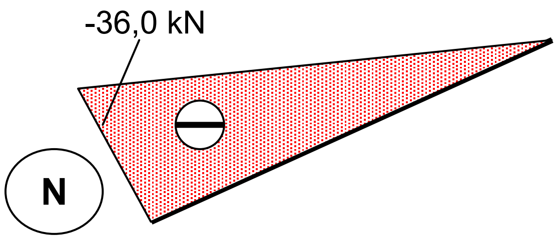
Da die Schnittgrößen $N_{1,r}$ und Q1,r die Unbekannten in den nachfolgenden Gleichgewichtsbedingungen sind, werden die bekannten Auflagerreaktionen in Komponenten // und ⊥ zur Stabachse zerlegt.

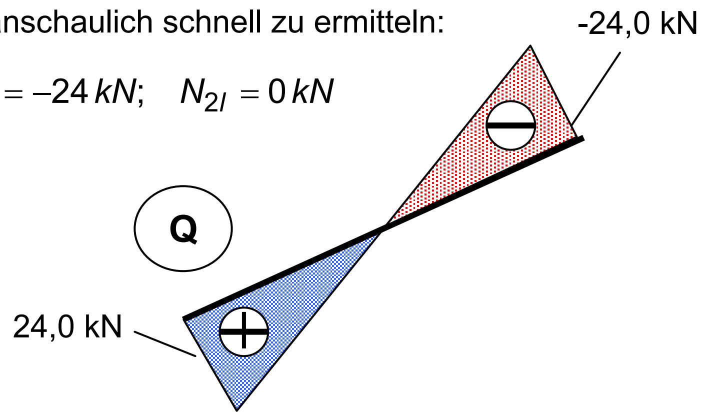
$$\overline{\sum K_{//}} = 0: \quad +H_1 \cdot \cos\alpha + V_1 \cdot \sin\alpha + N_{1r} = 0 \quad \rightarrow N_{1r} = -36{,}0\,kN$$

$$\downarrow \sum K \perp = 0: \quad +H_1 \cdot \sin\alpha - V_1 \cdot \cos\alpha + Q_{z,1r} = 0 \quad \rightarrow Q_{z,1r} = +24{,}0\,kN$$

Die Schnittgrößen am Stabende im Knoten 2 sind anschaulich schnell zu ermitteln:

$$Anschauung \rightarrow M_{y,2l} = 0\,kNm; \quad Q_{z,2l} = -K_{\perp,2} = -24\,kN; \quad N_{2l} = 0\,kN$$





Hinweis: Da die Streckenlast konstant ist, wird der Querkraftverlauf wegen

$V'_z = -q$ linear,

der Momentenverlauf wegen

$M'_y = V_z$ parabolisch

sein. Für die Darstellung des Querkraftverlaufes (und des Normalkraftverlaufes) reichen die Werte (als Stützstellen) am den jeweiligen Stabenden, um den kompletten linearen Verlauf darstellen zu können. Der Verlauf des Biegemomente muss ist parabolisch (Parabel 2. Ord.) und kann nur durch drei Stützstellen korrekt dargestellt werden.

Aufgabe: Bestimmen Sie das Biegemoment in Feldmitte und stellen Sie den Momentenverlauf für die nebenstehende Aufgabe dar (Kontrolle: max M_y = +30,0 kNm).

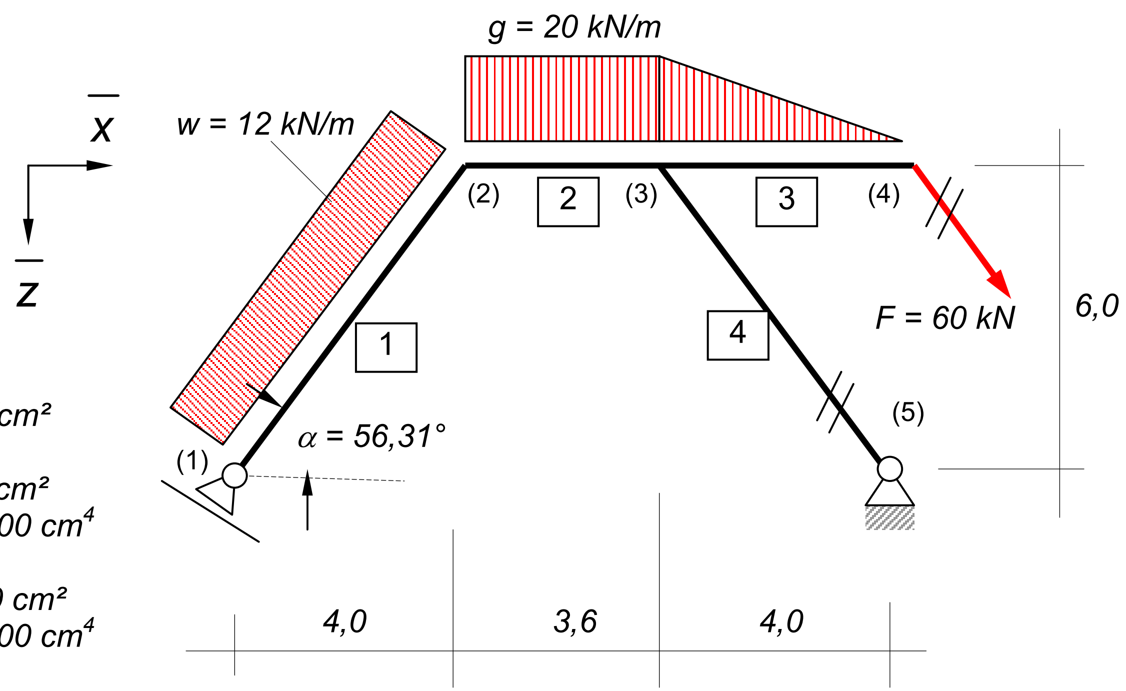
Weitere Aufgabe: Wiederholen Sie die Rechnung stimmen Sie das Biegemoment in Feldmitte und stellen Sie den

d) Verformungen (im globalen System)

Verformungsgrößen im ebenen x-z-System sind **Verschiebungen** in horizontaler und vertikaler Richtung (*u, w*) und die **Verdrehung** um die y-Achse (φ_y). Diese beschreiben die Verformung eines Punktes (z.B. eines Systemknotens) und sind damit unabhängig von der Ausrichtung der angrenzenden Stäbe. Die Verformungsgrößen werden damit immer im globalen System angegeben. Die Gesamtverformung eines Punktes ergibt sich aus der vektoriellen Addition.

e) Interpretation der Ergebnisse eines Statik-Programms

Besondere Punkte: Stabverzweigung (Knoten 3); Richtungsänderung (Kn. 2); Lasten im globalen und lokalen Koordinatensystemen; schiefes Auflager; linear veränderliche Streckenlast;



E = 2000 kN/cm²

$A_1 = A_4 = 80\ cm^2$
$J_{y1} = J_{y4} = 2000\ cm^4$

$A_2 = A_3 = 120\ cm^2$
$J_{y2} = J_{y3} = 3200\ cm^4$

Hinweis: Im räumlichen System werden die Verschiebungsgrößen ***u, v*** und **w** den globalen Achsen x, y und z zugeordnet. Die Größen φ_x, φ_y und φ_z beschreiben die Verdrehungen um die jeweiligen globalen Achsen im Uhrzeigersinn.

Aufgabe: Das nebenstehende Tragwerk ist mit Hilfe eines Statikprogramms zu berechnen. Die Schnittgrößen sind zu analysieren (Gleichgewichtkontrollen durchführen) ebenso die Verformungsgrößen (Verformungsbedingungen überprüfen). Die Auflagerreaktionen sind durch Gleichgewichtskontrollen zu überprüfen.

6.2 Statische Bestimmtheit, Abzählkriterium

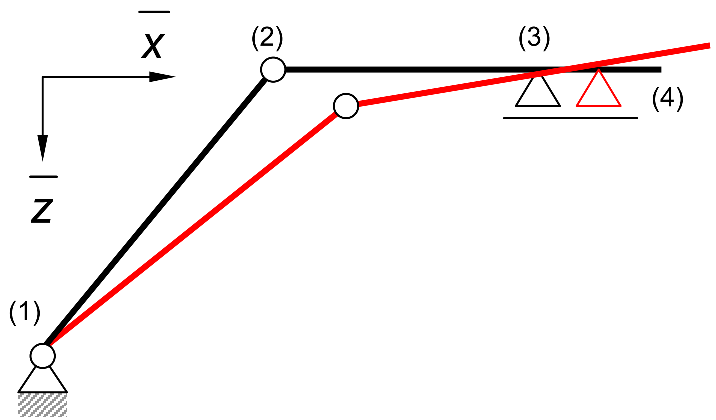
Um die Eigenschaften und das Tragverhalten eines statischen Systems zu beurteilen, muss es Kriterien geben, die eine Einordnung hinsichtlich der Berechnung und der Brauchbarkeit des Tragsystems ermöglichen. Ein Sytem kann

- statisch unterbestimmt,
- statisch bestimmt oder
- statisch unbestimmt (statisch überbestimmt)

sein.

Ein Tragwerk ist statisch unterbestimmt, wenn ohne Kraftaufwand eine Verschiebung oder Verdrehung des Tragwerks oder Teile davon möglich ist. Man spricht dann von einer **kinematischen Kette**. Statisch unterbestimmte Tragwerke sind unmittelbar einsturzgefährdet und als Tragstruktur unbrauchbar.

Beispiel:

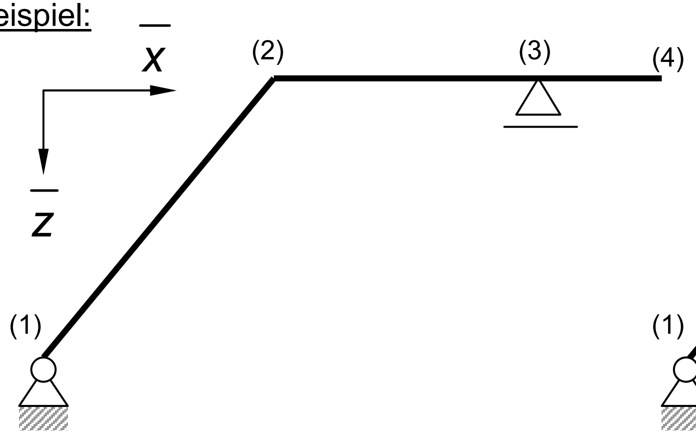


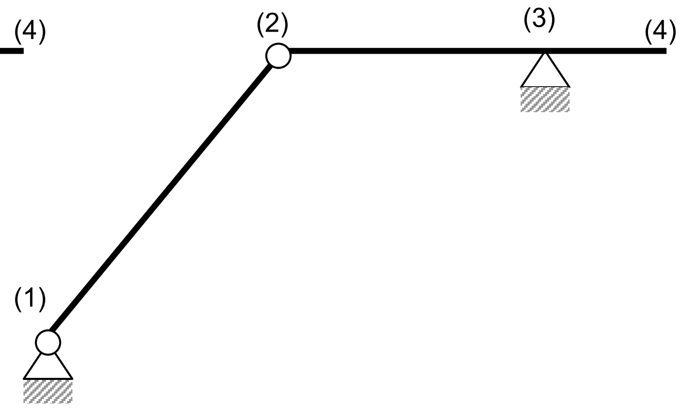
Ein Tragwerk ist statisch bestimmt, wenn alle Auflagerreaktionen und Schnittgrößen nur mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können. Ein statisch bestimmtes System ist stabil gelagert. Lasten werden – eine entsprechende Dimensionierung vorausgesetzt – sicher aufgenommen. Bei ebenen Systemen (z.B. in der x-z-Ebene) stehen drei Gleichgewichtsbedingungen (z.B. $\Sigma M_y = 0$;

Hinweis: Statisch unterbestimmte Systeme kommen häufiger vor, als einem lieb ist. Bei Bauzuständen während der Bauphase oder dem Gerüstbau gibt es immer wieder kritische Zustände, die auf den ersten Blick nicht sofort erkannt werden.

$\Sigma K_x = 0$ und $\Sigma K_z = 0$) zur Verfügung. Bei räumlichen Systemen gibt es sechs Gleichgewichtsbedingungen ($\Sigma K_x = 0$; $\Sigma K_y = 0$; $\Sigma K_z = 0$ sowie $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma M_y = 0$ und $\Sigma M_z = 0$).

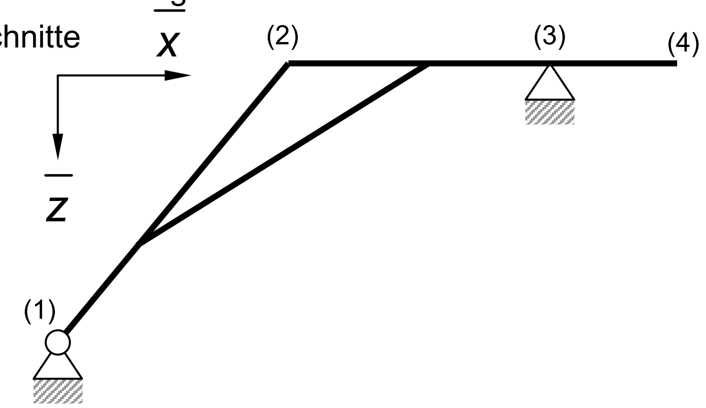
Beispiel:





Bitte ausprobieren: Bitte rütteln Sie einmal an einem der nebenstehenden Systeme. Die beiden Systeme sind unverschieblich. Sie werden sich zwar unter einer Last elastisch verformen, aber bei einer Entlastung wird sich der Knoten (2) wieder in die alte Lage zurückbewegen.

Ein Tragwerk ist statisch unbestimmt oder statisch überbestimmt, wenn alle Auflagerreaktionen und Schnittgrößen nur mit Hilfe von Gleichgewichts- **und** Verformungsbedingungen ermittelt werden können. Die Auflagerreaktionen und Schnittgrößenverteilung innerhalb des statisch unbestimmten Systems sind u.a. von der Dehnsteifigkeit ($E \cdot A$) und der Biegesteifigkeit ($E \cdot I$) der verwendeten Stabquerschnitte abhängig. Auch ein statisch unbestimmtes System ist stabil gelagert. Lasten werden sicher aufgenommen. Durch überzählige Bindungen besitzt das System Tragreserven. Statisch unbestimmte Systeme werden wegen des hohen Aufwandes i.d.R. mit einem Statikprogramm berechnet.



Hinweis: E = Elastizitätsmodul; A = Querschnittsfläche eines Stabes; I_y bzw. I_z = Trägheitsmomente eines Stabes.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit kann mit Hilfe des **Abzählkriteriums** ermittelt werden. Die Grundlage für das Abzählkriterium ist die Bilanz zwischen den Unbekannten und Gleichungen nach Anwendung des Schnittprinzips.

Zur systematischen Betrachtung wird das Tragsystem durch Schnitte in einfach zusammen hängende Schieben (ohne Gelenke) zerteilt. Die Anzahl der Unbekannten ergibt sich aus den Auflagerreaktionen und den durch die notwendigen Schnitte freigelegten Zwischenreaktionen (vgl. weiter unten).

Es gilt:

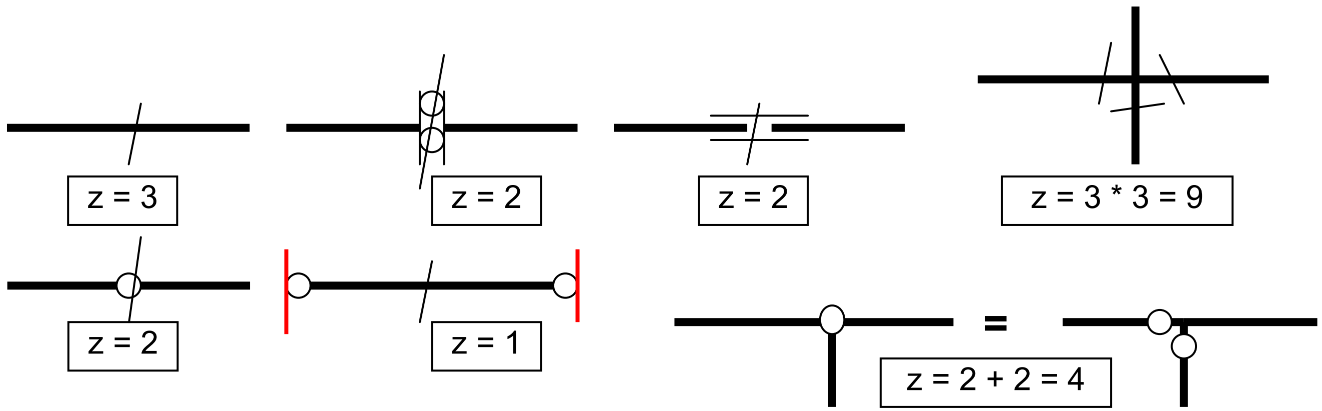
$$n = a + z - 3 \cdot p$$

Mit **a** = Anzahl der Auflagerreaktionen; **z** = Anzahl der Zwischenreaktionen in den Schnitten und **p** = Anzahl der einfach zusammenhängenden Scheiben.

- Ist **n < 0**, so ist das System statisch unterbestimmt, also verschieblich.
- Ergibt sich **n = 0**, so ist das System statisch bestimmt.
- Errechnet sich **n > 0**, so ist das System statisch unbestimmt.

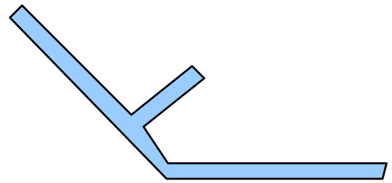
Bitte merken: Das Abzählkriterium stellt nur eine notwendige Bedingung für die Unverschieblichkeit eines System dar; diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend.

Je nach Schnittführung wird durch einen Schnitt eine unterschiedliche Anzahl an Zwischenreaktionen freigelegt. Das nachfolgende Bild zeigt verschiedene Möglichkeiten.

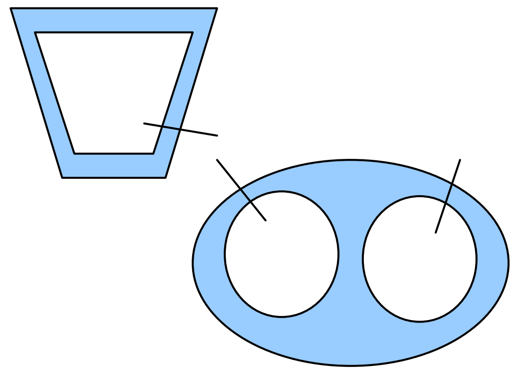


Hinweis: Unter einer einfach zusammenhängenden Scheibe versteht man einen Körper, der eine zusammenhängen Oberfläche besitzt.

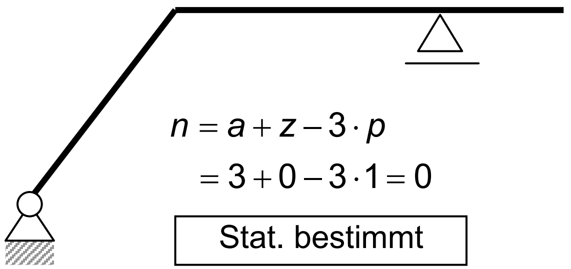
Einfach zusammenhängend:



Mehrfach zusammenhängend:

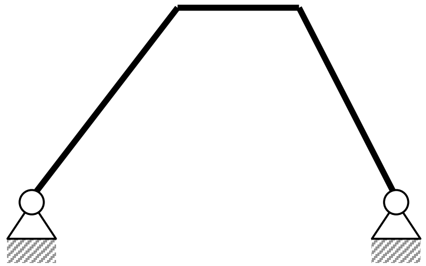


Beispiele zur Anwendung des Abzählkriteriums:



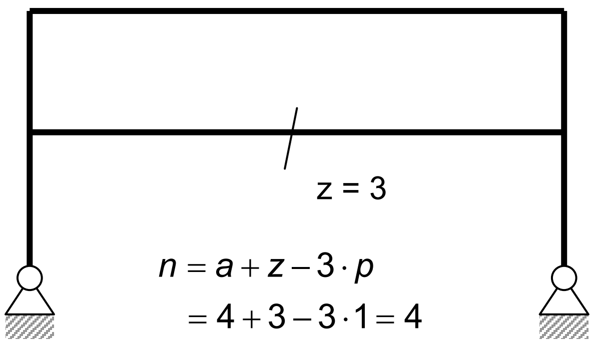
$$n = a + z - 3 \cdot p$$
$$= 3 + 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

Stat. bestimmt



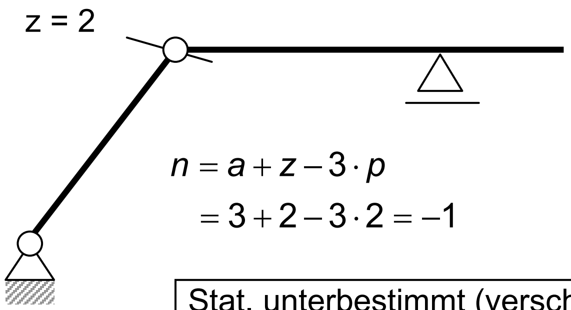
$$n = a + z - 3 \cdot p$$
$$= 4 + 0 - 3 \cdot 1 = 1$$

Stat. unbestimmt



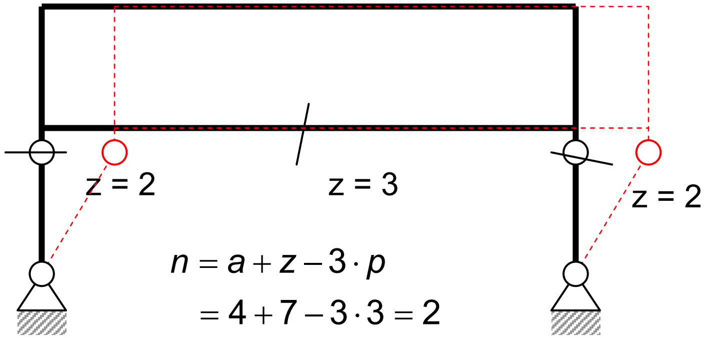
$$n = a + z - 3 \cdot p$$
$$= 4 + 3 - 3 \cdot 1 = 4$$

Stat. unbestimmt



$$n = a + z - 3 \cdot p$$
$$= 3 + 2 - 3 \cdot 2 = -1$$

Stat. unterbestimmt (verschiebl.)



$$n = a + z - 3 \cdot p$$
$$= 4 + 7 - 3 \cdot 3 = 2$$

Stat. unbestimmt, oder ????

Aufgabe: Entwerfen Sie selbst einige statische Systeme und fragen Sie dann Ihre Kommilitonen, wie groß der Grad der statischen Unbestimmtheit ist.

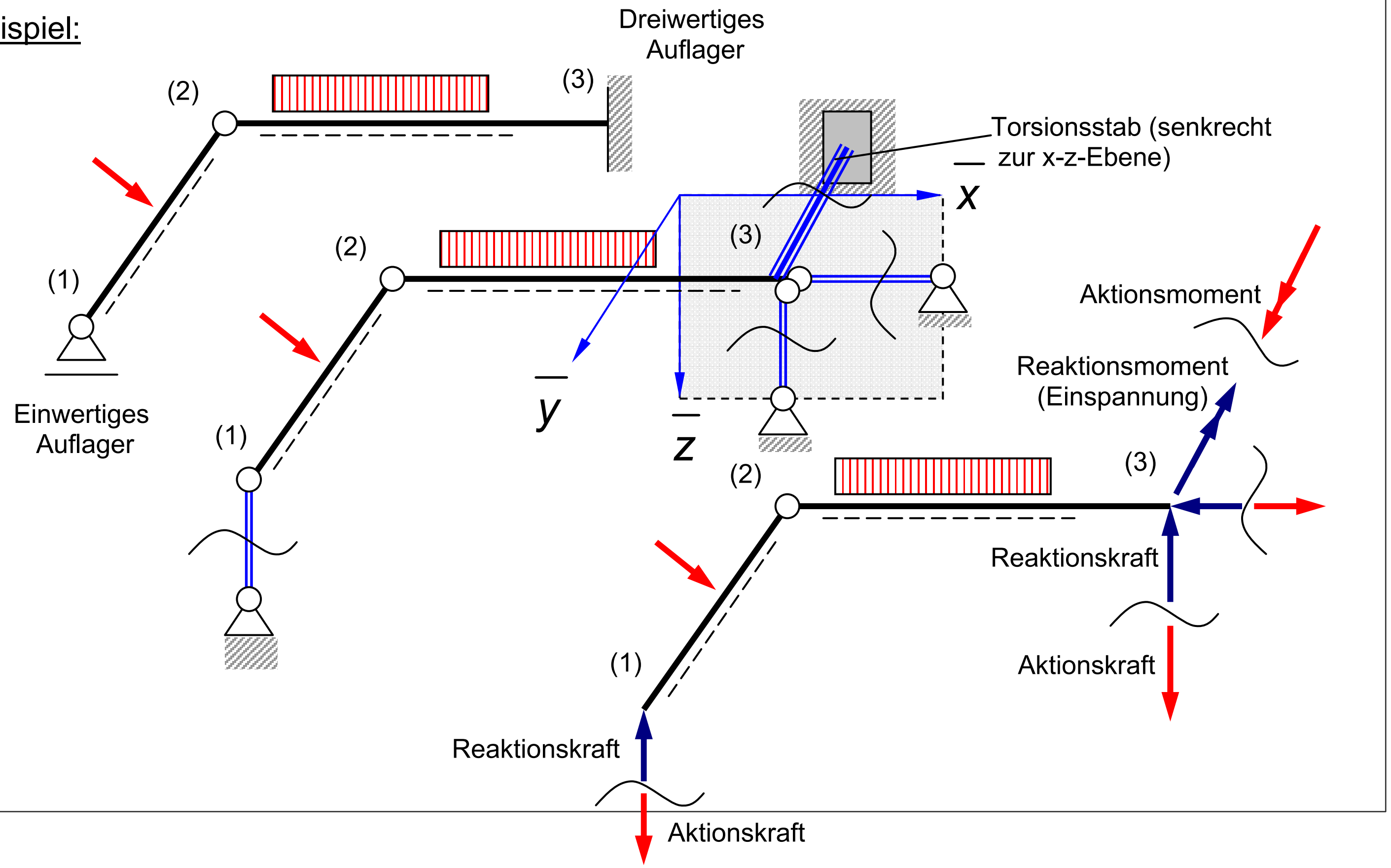
Achtung: Es gibt Systeme, bei denen man sich auch richtig täuschen kann. Hier muss man lokal nach verschieblichen Teilsystemen Ausschau halten (vgl. nebenstehendes System).

6.3 Berechnung der Auflagergrößen

An den Stellen einer durch äußere Lasten beanspruchten Konstruktion, an denen sie an eine andere Konstruktion oder über Fundamente an den Erdboden „gefesselt" ist, treten **Auflagerreaktionen** auf. Diese Auflagerreaktionen erzeugen gleich große und entgegen gesetzt gerichtete Aktionskräfte (ggf. auch Aktionsmomente), die auf die Last aufnehmende Konstruktion oder den Erdboden wirken.

Zur anschaulichen Darstellung der Aktions- und Reaktionskräfte an den Lagerpunkten werden für Auflagerkräfte gedanklich Pendelstäbe und für ein Auflagermoment (Einspannung) ein Torsionsstab eingefügt. Werden diese geschnitten, so wirken die Lagerkräfte an den tragwerksseitigen Schnittufern als Reaktionskräfte und an den erdbodenseitigen Schnittufern gleich große und entgegengesetzt gerichtet Aktionskräfte.

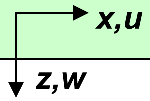
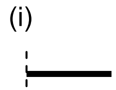
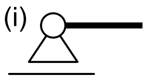
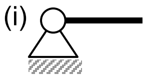
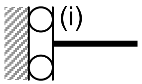
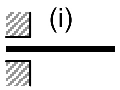
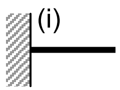
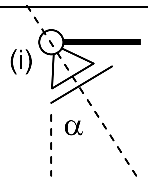
Beispiel:



Hinweis: Die Festlegung des Vorzeichens einer Reaktionskraft bzw. eines Reaktionsmomentes ist bei ebenen Systemen (hier in der x-z-Ebene) egal und dem Tragwerksplaner überlassen. Allerdings sollte es sie während einer statischen Berechnung **nie** mehr ändern.

Bei räumlichen System (Kap. 8) wird man die Vorzeichendefinition der Reaktionsgrößen am globalen Koordinatensystem ausrichten, um systematischer vorgehen zu können.

Auflagertypen:

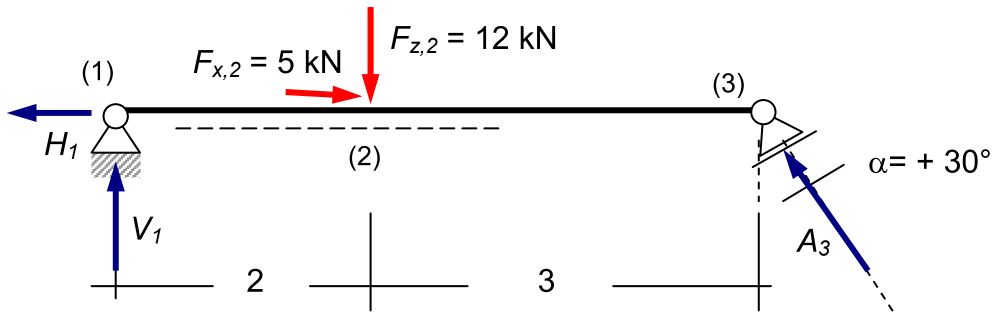
Lagerart 	**Verformungsbedingungen** (Knotenverformungen)	**Gleichgew.-bedingungen** (Schnittgr. rechts vom Aufl.)
Freies Stabende 	$u_i \neq 0$; $w_i \neq 0$; $\varphi_{y,i} \neq 0$	$N_i = 0$; $V_{z,i} = 0$; $M_{y,i} = 0$
Einwertiges Auflager 	$u_i \neq 0$; $w_i = 0$; $\varphi_{y,i} \neq 0$	$N_i = 0$; $V_{z,i} \neq 0$; $M_{y,i} = 0$
Zweiwertiges Auflager (M-Gelenk) 	$u_i = 0$; $w_i = 0$; $\varphi_{y,i} \neq 0$	$N_i \neq 0$; $V_{z,i} \neq 0$; $M_{y,i} = 0$
Zweiwertiges Auflager (Q-Gelenk) 	$u_i = 0$; $w_i \neq 0$; $\varphi_{y,i} = 0$	$N_i \neq 0$; $V_{z,i} = 0$; $M_{y,i} \neq 0$
Zweiwertiges Auflager (N-Gelenk) 	$u_i \neq 0$; $w_i = 0$; $\varphi_{y,i} = 0$	$N_i = 0$; $V_{z,i} \neq 0$; $M_{y,i} \neq 0$
Dreiwertiges Auflager (Einspann.) 	$u_i = 0$; $w_i = 0$; $\varphi_{y,i} = 0$	$N_i \neq 0$; $V_{z,i} \neq 0$; $M_{y,i} \neq 0$
<u>Sonderfall</u>: geneigtes einwertiges Auflager 	$u_i = \delta \cdot \sin \alpha$; $w_i = \delta \cdot \cos \alpha$; $u_i = w_i \cdot \tan \alpha$ $\varphi_{y,i} \neq 0$	$N_i = A \cdot \sin \alpha$; $V_{z,i} = A \cdot \cos \alpha$; $N_i = V_{z,i} \cdot \tan \alpha$ $M_y = 0$

Die Auflagerreaktionen werden – sofern es sich um ein statisch bestimmtes System handelt – mit Hilfe der üblichen Gleichgewichtsbedingungen gewonnen. In der x-z-Ebene sind dieses die Bedingungen $\Sigma M_y = 0$; $\Sigma K_x = 0$ und $\Sigma K_z = 0$.

Hinweis: Die angegebenen Schnittgrößen in der 3. Spalte setzen voraus, dass keine weiteren Einzellasten oder kein Lastmoment im Knoten i (als Knotenkräfte) angreifen.

Hinweis: Die Verformung in Schrägrichtung wurde mit δ (=delta) bezeichnet und zeigt als positiver Wert nach unten rechts.
Die schiefe Auflagerkraft A zeigt als positiv definierte Kraft nach oben links.

<u>Beispiel:</u> Gegeben ist ein einfeldriger Balken mit schiefer Lagerung. Gesucht sind die Auflagerreaktionen und die Verläufe für N, V_z und M_y.



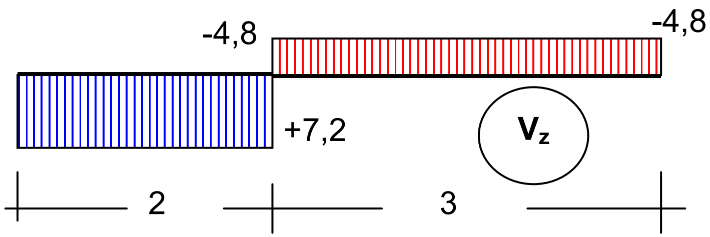
<u>Berechnung der Auflagerreaktionen:</u>

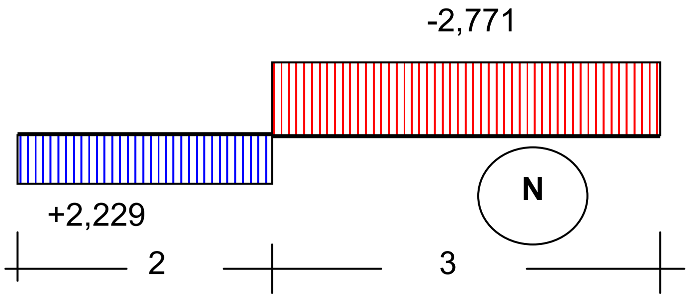
$$\Sigma \overleftarrow{M}_1 = 0: \quad -F_{z,2} \cdot 2 + A_3 \cdot \cos\alpha \cdot 5 = 0 \quad \rightarrow \quad A_3 = 5,543\,kN$$

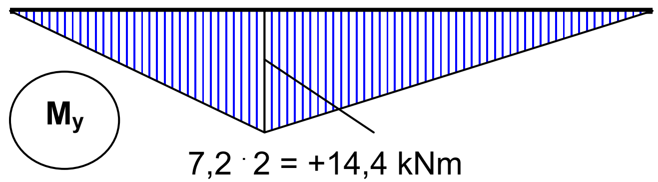
$$\downarrow \Sigma V = 0: \quad -V_1 + F_{z,2} - A_3 \cdot \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 7,2\,kN$$

$$\Sigma \overrightarrow{H} = 0: \quad -H_1 + F_{x,2} - A_3 \cdot \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad H_1 = 2,229\,kN$$

<u>Darstellung der Schnittgrößenverläufe:</u>







$$Kontrolle: \quad A_3 = \sqrt{N_{3,l}^2 + Q_{z3,l}^2} = 5,543\,kN$$

Hinweis: Versuchen Sie, die dargestellten Schnittgrößen anschaulich nachzuvollziehen. Fangen Sie mit der Q-Linie am Knoten 1 an. „Springen“ Sie den Einzellasten (also der Auflagerkraft V_1 und dann der Einzellast $F_{z,2}$) entgegen.

Da keine Streckenlasten vorhanden sind, ist der V-Verlauf konstant, der M-Verlauf linear veränderlich. Die Steigung des M-Verlaufes muss dem V-Verlauf entsprechen; also kann der max. M-Wert in Knoten 2 schnell ermittelt werden.

Der N-Verlauf ist auch anschaulich leicht zu entwickeln. Zug zwischen Knoten 1 und 2; Druck zwischen 2 und 3. Der Sprung im N-Verlauf muss der Größe $F_{x,2}$ entsprechen.

Eine Kontrolle am Ende (hier am Knoten 3 mit Hilfe des Rundschnittverfahrens) kann nicht schaden.

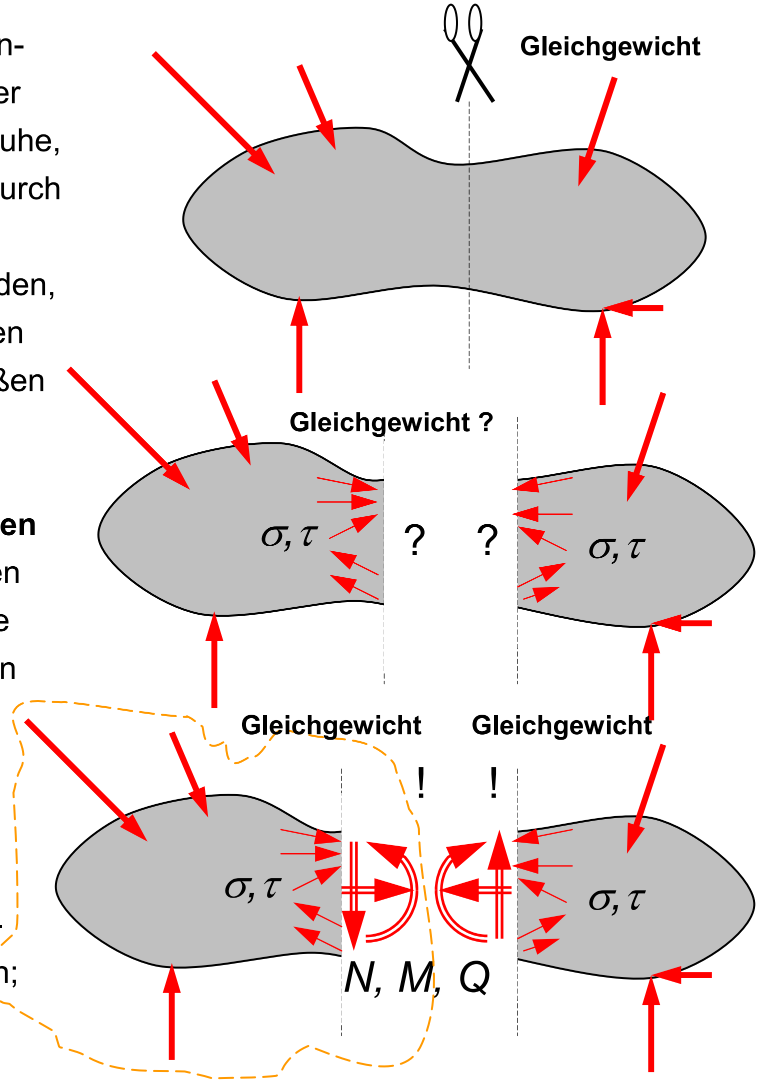
Wem das alles nichts nützt, muss die unbekannten Schnittgrößen an ausgewählten Punkten entlang der Stabachse mit Hilfe des Schnittprinzips ermitteln (z.B. am Knoten 2, links und/oder rechts davon).

6.4 Anwendung des Schnittprinzips

Lasten, die auf ein Tragwerk einwirken, führen im Inneren seiner Bauteile zu Beanspruchungen. Diese müssen genau bekannt sein müssen, um beurteilen zu können, ob das Material sie aushält. Um die Beanspruchungen im Inneren eines Körpers zu ermitteln, müssen diese durch Anwendung des **Schnittprinzips** sichtbar und damit berechenbar gemacht werden.

Befindet sich der gesamte Körper unter der Einwirkung der Lasten und der Reaktionskräfte der Auflager im Gleichgewicht, so ist er damit in Ruhe, wie alle Teile des Körpers auch. Trennt man durch einen gedachten Schnitt ein Teilsystem ab, so kann es sich nur dann weiterhin in Ruhe befinden, wenn die inneren Kraftwirkungen, die durch den Schnitt verloren gegangen sind, durch von außen wirkende und äquivalente Kraftgrößen ersetzt werden. Diese durch den Schnitt sichtbar gemachten Kraftgrößen werden als **Schnittgrößen** bezeichnet. Den Zusammenhang zwischen den inneren Kraftwirkungen (geschrieben durch die Verteilung von σ und τ) und den Schnittgrößen stellen Gleichungen aus der Festigkeitslehre her.

Damit das abgetrennte Teilsystem im Gleichgewicht ist, müssen an der Schnittstelle eben solche Kraftgrößen wirken, die die drei Gleichgewichtsbedingungen (im ebenen Fall) erfüllen; also N, V_z und M_y.



Hinweis: Kap. 6.4 bringt Ihnen nichts Neues. Aber es kann nicht schaden, wenn man sich dieses Prinzip noch einmal deutlich macht. Es ist ein mächtiges Werkzeug zur Schnittgrößenermittlung.

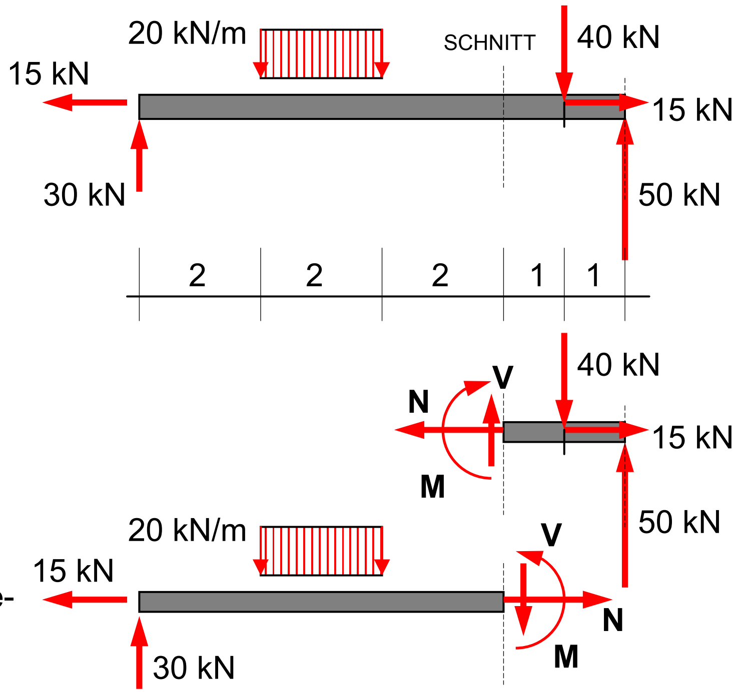
Hinweis: Aus STA1 ist die Gleichung

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

bekannt. Eine andere war:

$$\tau_i = \frac{Q_z \cdot S_{y,i}}{I_y \cdot t_i}$$

Betrachten wir einen stabförmigen Körper, der sich in einem Gleichgewichtszustand befindet. Durch den Schnitt wird der Stab in Teile zerlegt. Am rechten Teilsystem ist einfach zu erkennen, dass im Schnitt innere (bislang noch unbekannte) Kraftgrößen wirken müssen, die für das Gleichgewicht am Teilsystem notwendig sind. An der Schnittfläche des rechten Teilsystems muss eine horizontale und eine vertikale Kraft wirken, um die H-Kraft von 15 kN und die Differenz der Vertikalkräfte auszugleichen. Da die Vertikalkräfte einen Abstand voneinander haben, bilden sie eine Kräftepaar, das eine Drehwirkung auf das Teilsystem ausübt. Im Schnitt muss also zusätzlich ein Moment wirken, das die Drehwirkung kompensiert.



Durch Anwendung des Schnittprinzips werden also an den beiden entstandenen Schnittufern zwei Kräfte und ein Moment freigelegt; die Schnittgrößen N, V und M. Aufgrund des Prinzips „**Actio = Reactio**“ sind diese Schnittgrößen entgegengesetzt gleich. Die Schnittgrößen können mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen <u>wahlweise</u> am linken oder rechten Teilsystem ermittelt werden. Wählt man beispielsweise das linke Teilsystem, so ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$\sum \vec{H} = 0: \quad -15 + N = 0 \quad \rightarrow N = 15{,}0\, kN$$

$$\downarrow \sum V = 0: \quad -30 + 20 \cdot 2 + Q = 0 \quad \rightarrow Q = -10{,}0\, kN$$

$$\sum \vec{M} = 0: \quad +30 \cdot 6 - 20 \cdot 2 \cdot 3 - M = 0$$

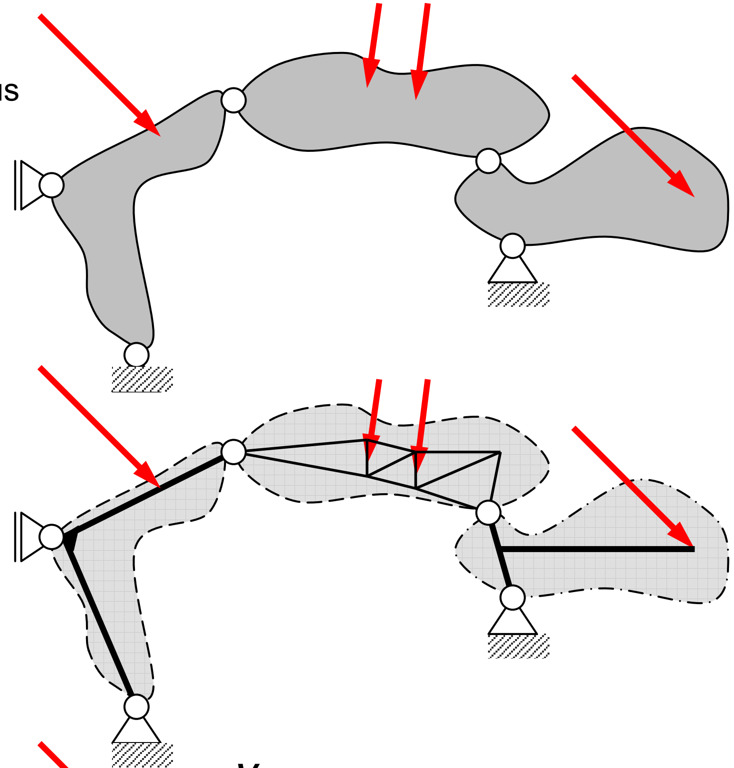
$$\rightarrow M = +60{,}0\, kNm$$

Die Berechnung am rechten Teilsystem führt selbstverständlich zum gleichen Ergebnis. Man sollte sich das Teilsystem aussuchen, an dem weniger Kraftgrößen angreifen, um den Aufwand zu minimieren.

Aufgabe: Führen Sie den Schnitt von links beginnend in jedem Meterschnitt. Tragen Sie die Ergebnisse für N, V und M entlang der Stabachse auf.

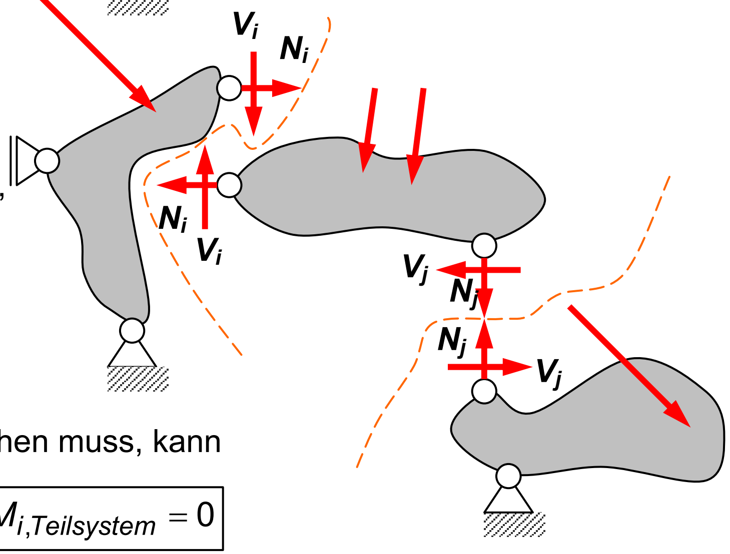
6.5 Berechnung von Gelenkträgern

Gelenkträger sind **mehrteilige Tragwerke**, die aus einem Verband von starren Scheiben, also aus einen Verband von in sich kinematisch unverschieblichen Körpern gebildet werden. Ob die Scheiben im realen Tragwerk aus einem geknickten Träger, einem verzweigten Träger oder aus einem oder mehreren Gelenkdreiecken bestehen, ist zunächst einmal ohne Bedeutung.



Die drei Scheiben in der nebenstehenden Abbildung sind durch zwei Momentengelenke miteinander verbunden. Sie könnten sich in den Gelenken relativ zueinander verdrehen. Aus diesem Grund werden in diesen Punkten keine Momente, sondern nur Kräfte übertragen.

Um die Schnittgrößen innerhalb des Scheibenverbands bestimmen zu können, nutzt man das Schnittprinzip und legt die „**Zwischenreaktionen**“, d.h. die Bindungskräfte an den Kopplungsstellen zwischen den Scheiben frei. Da im nebenstehenden Beispiel keine Momente übertragen werden können, gilt hier jeweils: $M_{i,links} = M_{i,rechts} = 0$



Da jedes Teilsystem für sich im Gleichgewicht stehen muss, kann eine **Gelenkbedingung** für die Berechnung unbekannter Kraftgrößen formuliert werden:

$$\boxed{\Sigma M_{i,Teilsystem} = 0}$$

Hinweis: Ein typischer Gelenkträger ist der **Gerberträger** oder der **Dreigelenkträger** (vgl. TFL aus dem 1. Semester).

Zur Erinnerung: Das nebenstehende System ist statisch bestimmt:

$$n = a + z - 3 \cdot s$$
$$= 5 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0$$

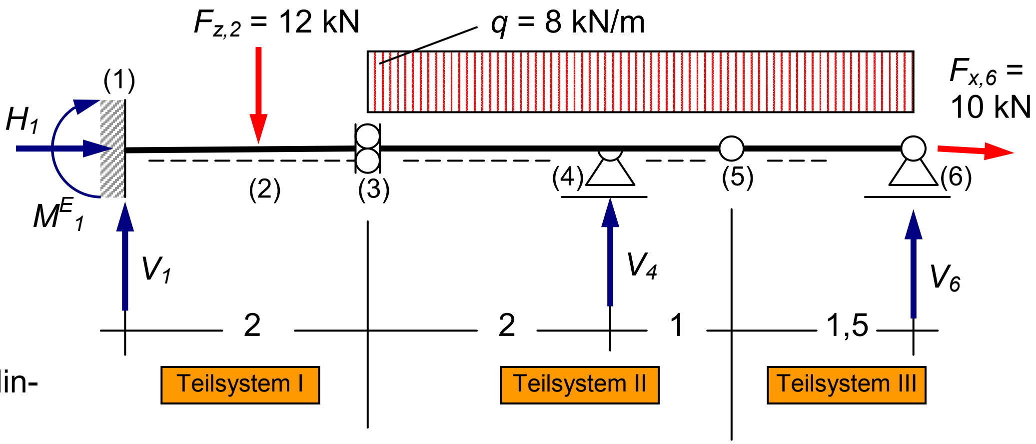
Hinweis: An den Kopplungsstellen müssen nicht zwangsläufig immer Momentengelenke vorhanden sein. Genauso können Querkraftgelenke oder Normalkraftgelenke vorkommen. Die Gelenkbedingung lautet dann:

$$\boxed{\Sigma V_{Teilsystem} = 0}$$

dzw.

$$\boxed{\Sigma H_{Teilsystem} = 0}$$

Beispiel für ein mehrteiliges Tragwerk: Wie sieht der M- bzw. V-Verlauf aus?



Statische Unbestimmtheit:

$$n = a + z - 3 \cdot s$$
$$= 5 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0$$

Auflagerreaktionen:

Zunächst ohne Gelenkbedingung berechenbar:

$$\Sigma \overrightarrow{H}_{Gesamt} = 0: \quad + H_1 + F_{x,6} = 0 \quad \rightarrow H_1 = -10\,kN$$

Weitere Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem führen zu Gleichungen, die mehr als eine Unbekannte aufweisen. Deshalb wird eine Gelenkbedingung herangezogen, die eine Bestimmungsgleichung für eine Unbekannte liefert.

$$\Sigma \overrightarrow{M}_{y,Teilsyst.III} = 0: \quad + q \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}75 - V_6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \rightarrow V_6 = +6{,}0\,kN$$

Auch das Querkraftgelenk in Knoten 3 liefert eine weitere Zwischenbedingung:

$$\downarrow \Sigma V_{Teilsyst.I} = 0: \quad + F_{z,2} - V_1 = 0 \quad \rightarrow V_1 = +12{,}0\,kN$$

Jetzt sind bis auf V_4 alle vertikalen Auflagerreaktionen bekannt. Die Geichgewichtsbetrachtung am Gesamtsystem liefert:

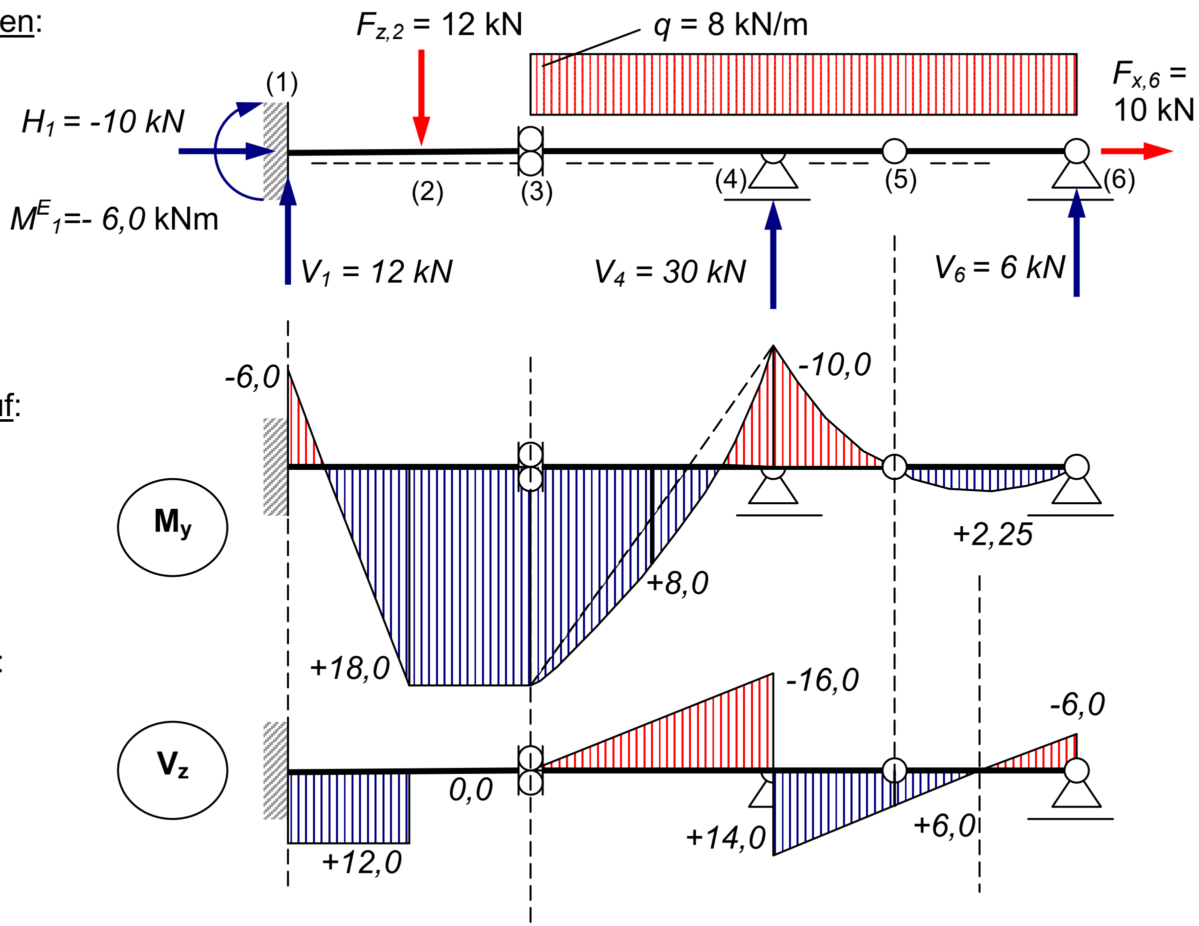
$$\downarrow \Sigma V_{Gesamtsyst.} = 0: \quad + F_{z,2} + q \cdot 4{,}5 - V_1 - V_4 - V_6 = 0 \quad \rightarrow V_4 = +30{,}0\,kN$$

Das Einspannmoment am Auflager 1 kann entweder durch eine Momentenbedingung am Gesamtsystem oder – wie hier gezeigt – eine Gelenkbedingung für das Teilsystem I+II gelöst werden:

$$\Sigma \overleftarrow{M}_{5,Teilsyst.I+II} = 0: \quad -M_1^E - V_1 \cdot 5 - V_4 \cdot 1 + F_{z,2} \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \rightarrow M_1^E = -6{,}0\,kNm$$

Hinweis: Im Querkraftgelenk kann keine Querkraft und damit global betrachtet keine Vertikalkraft übertragen werden. Für das Teilsystem I allein muss daher die Summe aller Vertikalkräfte gleich null sein. Logisch, oder?

Auflagerreaktionen:

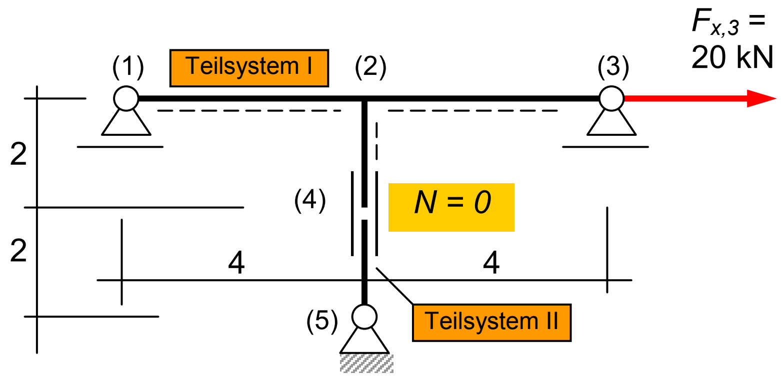


Momentenverlauf:

Querkraftverlauf:

Kleines Beispiel zum Selbstüben:

In Knoten 4 ist ein Schiebehülse, also ein Normalkraftgelenk vorhanden. Wie sieht M, Q und N aus?



Hinweis: Der Querkraftverlauf lässt sich bei bekannten Auflagerkräften problemlos (anschaulich) bei Knoten 1 beginnend entwickeln. Im Querkraftgelenk muss V gleich null sein. In den Stababschnitten, wo keine Streckenlast senkrecht zum Träger angreift, muss der V-Verlauf konstant, im anderen Fall bei q > 0 linear veränderlich sein. Dort wo eine Einzelkraft quer auf die Stabachse stößt, entsteht ein Sprung in der Q-Linie.

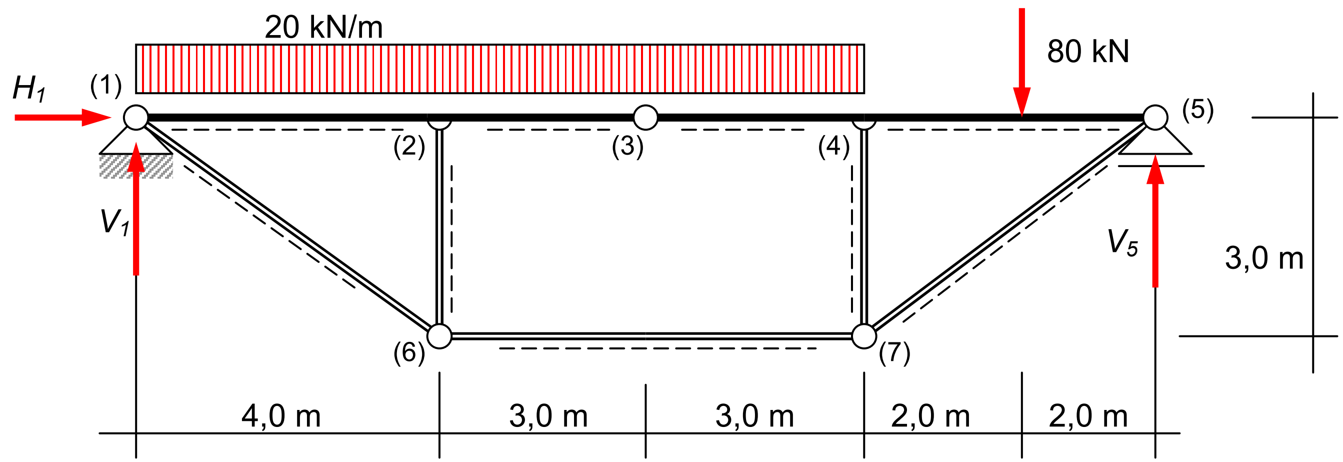
Die Größe der Querkraft gibt die Steigung der Momentenlinie vor. So kann z.B. im Stababschnitt 1 bis 3 der M-Verlauf ohne große Rechenkünste entwickelt werden. Im eingehängten Träger zwischen Knoten 5 und 6 gelten „$qL^2/8$“ und „$qL/2$“. Etwas schwieriger ist es, das Stützmoment über dem Auflager 4 zu bestimmen. Hier hilft ein Schnitt rechts neben Knoten 4 weiter. Mit Hilfe von $\Sigma M = 0$ für das freigeschnittene Teilsystem zwischen Knoten 4(r) und 6 kann $M_{4,r}$ bestimmt werden. Alles Weitere sind nur noch „eingehängte“ „$qL^2/8$“-Parabeln.

Der N-Verlauf wurde hier nicht dargestellt. Er ist konstant bei +10 kN.

6.6 Gemischte Systeme

Gemischte Systeme sind aus **Fachwerkstäben** und **biegesteifen Stäben** zusammengesetzte Tragwerke. Die Berechnung derartiger Systeme unterscheidet sich nicht grundsätzlich von der anderer Systeme. Die Besonderheit ist nur die, dass beim Schneiden eines Fachwerkstabes (i.d.R. Pendelstäbe = Stäbe mit Momentengelenken an beiden Enden und ohne Querlast) nur die Normalkraft als alleinige Schnittgröße freigelegt wird. Da es bei einer Schnittführung wichtig ist, nur so viele (unbekannte) Schnittgrößen freizulegen wie Gleichungen vorhanden sind (im ebenen Fall sind das drei), bietet sich es an, beim Schneiden gezielt einen Fachwerkstab zu trennen und damit die Schnittgröße *N* freizulegen.

Beispiel: Unterspannter Brückenträger



Hinweis: Alle Stäbe unterhalb der Linie zwischen Knoten 1 und 5 sind Pendelstäbe (ohne Querlast). Bereits jetzt ist klar, dass der M- und der V-Verlauf hier gleich null ist. Biegung und Querkraft treten nur in den Stababschnitten zwischen Knoten 1 und 5 auf. Der M-Verlauf zwischen Knoten 1 und 4 wird parabolisch, der zwischen Knoten 4 und 5 linear veränderlich ausfallen Der V-Verlauf zwischen Knoten 1 und 4 wird linear veränderlich sein und der zwischen 4 und 5 konstant verlaufen.

Auflagerreaktionen: Das Gesamtsystem stellt eine starre Scheibe dar. Die drei Auflagerreaktionen lassen sich mit Hilfe der bekannten drei Gleichgewichtsbedinungen lösen:

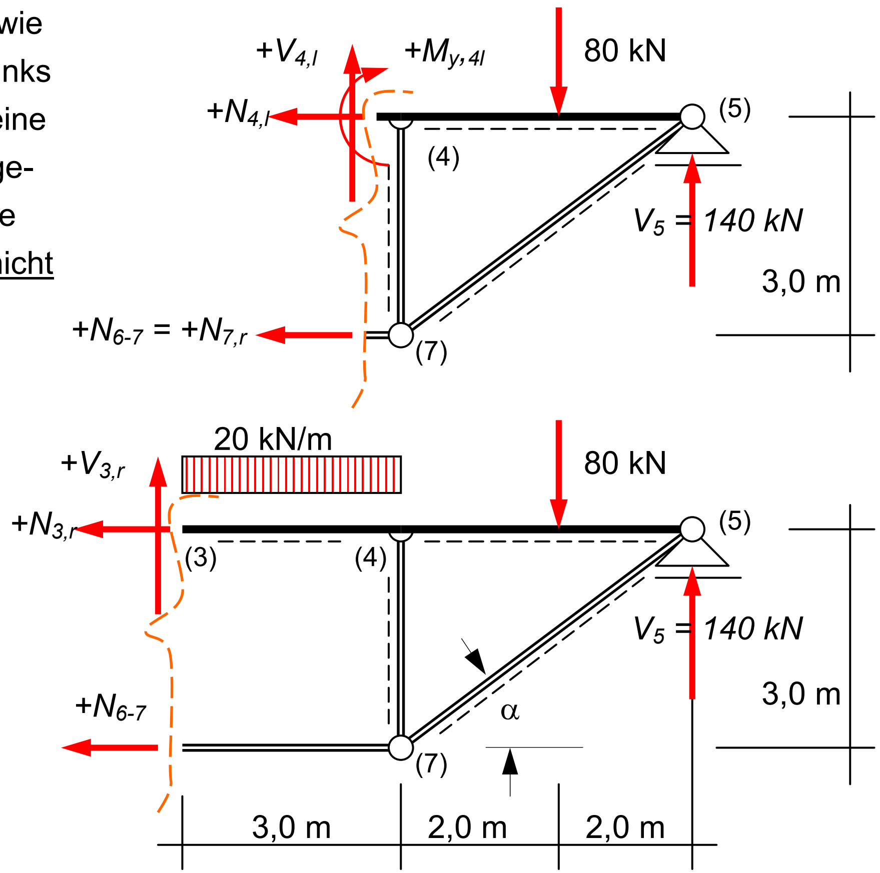
$$\Sigma \overrightarrow{M}_1 = 0: \quad -V_5 \cdot 14{,}0 + 20 \cdot 10{,}0 \cdot 5{,}0 + 80 \cdot 12{,}0 \quad \rightarrow V_5 = +140{,}0\,kN$$

$$\downarrow \Sigma V = 0: \quad -V_1 - V_5 + 20 \cdot 10{,}0 + 80 \quad \rightarrow V_1 = +140{,}0\,kN$$

Aus Anschauung: $\Sigma H = 0: \quad \rightarrow H_1 = 0$

<u>Schnittgrößen</u>: Führt man den Schnitt wie nebenstehend dargestellt, so werden links neben Knoten 4 drei und im Stab 6-7 eine Unbekannte freigelegt. Da drei Gleichgewichtsbedingungen für vier Unbekannte nicht ausreichen, kann dieser Schnitt <u>nicht</u> zur Lösung beitragen.

Besinnt man sich jedoch auf die Gelenkbedingung ($M_{y,3} = 0$), so führt ein vertikaler Schnitt durch Knoten 3 zu einem Teilsystem, das nur noch drei (unbekannte) Schnittgrößen zur Herstellung des Gleichgewichts benötigt. Die drei zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen führen auf folgende Lösung:



$$\Sigma \overrightarrow{M}_3 = 0: \quad +N_{6-7}\cdot 3 + 20\cdot 3{,}0\cdot 1{,}5 + 80\cdot 5{,}0 - V_5\cdot 7{,}0 = 0 \quad \rightarrow N_{6-7} = +163{,}\overline{3}\,kN\ (Zug)$$

$$\downarrow \Sigma V_{Teilsyst.} = 0: \quad -Q_{3,r} + 20\cdot 3{,}0 + 80 - V_5 = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{3,r} = 0 \quad (zufällig)$$

$$\Sigma H = 0: \quad \rightarrow \quad N_{3,r} = -N_{6-7} = -163{,}\overline{3}\,kN$$

Aus dem Rundschnitt um Knoten 7 ergibt sich mit tan $\alpha = 0{,}75$:

$$\Sigma \overrightarrow{H} = 0: \quad -N_{6-7} + N_{7-5}\cdot\cos\alpha \quad \rightarrow \quad N_{7-5} = +204{,}1\overline{6}\,kN$$

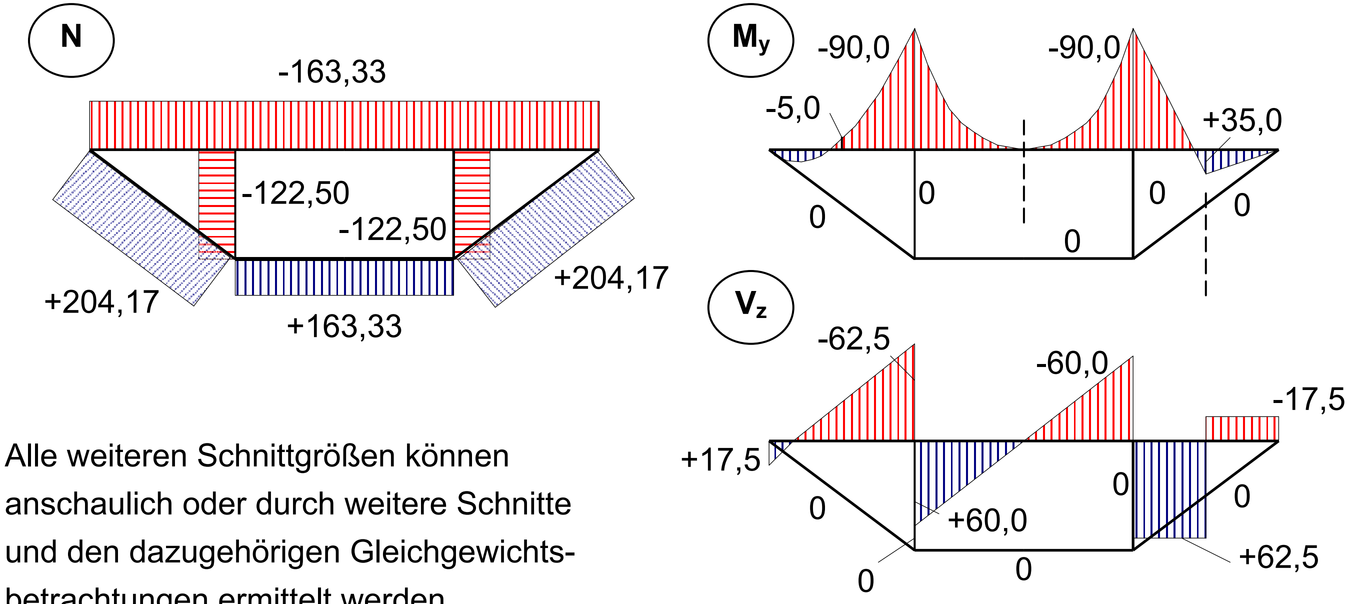
$$\downarrow \Sigma V = 0: \quad -N_{4-7} - N_{7-5}\cdot\sin\alpha \quad \rightarrow \quad N_{4-7} = -122{,}5\,kN$$

Hinweis: Wenn erst einmal $N_{6\text{-}7}$ bekannt ist, dann können die Normalkräfte $N_{4\text{-}7}$ und $N_{7\text{-}5}$ mit Hilfe des <u>Rundschnittverfahrens</u> (vgl. Fachwerksysteme) um Knoten 7 berechnet werden.

Wenn $N_{6\text{-}7}$ bekannt ist, kann an diesem Teilsystem auch $N_{3,r}$ und damit der Normalkraftverlauf zwischen Knoten 3 und 5 angegeben werden.

Wenn $N_{6\text{-}7}$ bekannt ist, dann können die Normalkräfte $N_{1\text{-}6}$ und $N_{6\text{-}2}$ mit Hilfe des <u>Rundschnittverfahrens</u> um Knoten 6 berechnet werden.

Es muss bei diesem System gelten: $N_{1\text{-}6} = N_{7\text{-}5}$ und $N_{6\text{-}2} = N_{4\text{-}7}$!!

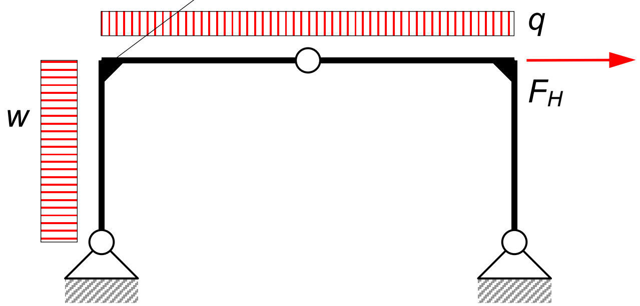


Alle weiteren Schnittgrößen können anschaulich oder durch weitere Schnitte und den dazugehörigen Gleichgewichtsbetrachtungen ermittelt werden.

6.7 Rahmensysteme und Stabverzweigungen

Rahmen sind Stabtragwerke, die horizontale Lasten über biegesteife Rahmenecken ins „Erdreich" ableiten. Die Rahmenecken müssen konstruktiv so ausgebildet sein (z.B. durch Knotenbleche im Stahlbau, durch schlaufenartige Bewehrung im Stahlbeton oder durch Kopfbänder im Holzbau), dass die Biegebeanspruchung problemlos von den hier zusammentreffenden Stäben aufgenommen werden können.

Ein typischer Vertreter ist der **Dreigelenkrahmen**. Es ist ein Verband aus zwei Scheiben, die jeweils zweiwertig gelagert sind und durch ein Momentengelenk miteinander gekoppelt sind.



Treffen in einem Knotenpunkt mehr als zwei Stäbe unter unterschiedlichen Winkeln zusammen, spricht

Aufgabe: Kontrollieren Sie die dargestellten Schnittgrößenverläufe, in dem Sie Rundschnitte um die Knoten 1, 2 und 6 legen und prüfen, ob das Gleichgewicht erfüllt ist.

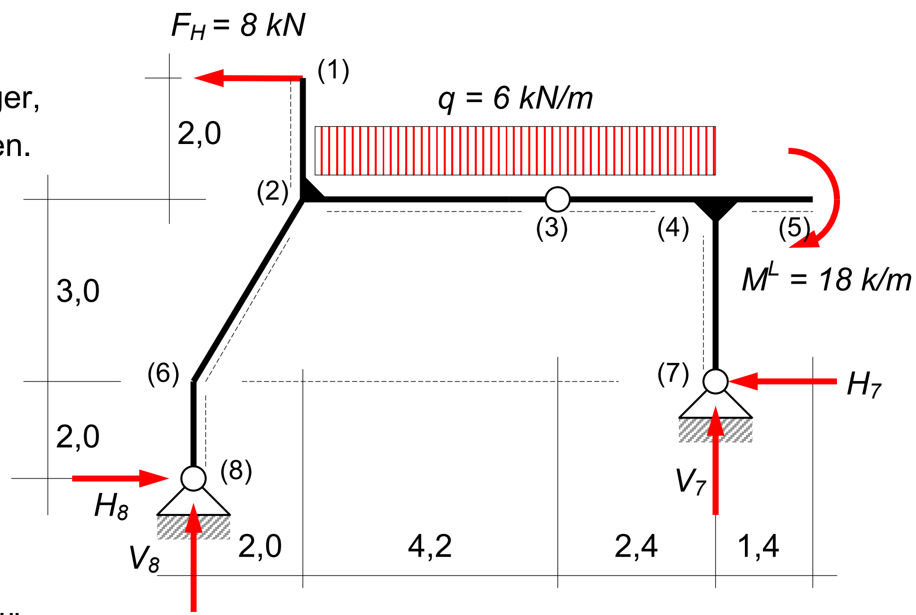
Noch eine Aufgabe: Wie sehen die Schnittgrößenverläufe aus, wenn anstatt der Einzellast zwischen Knoten 4 und 5 eine Streckenlast von 20 kN/m einwirkt? Was ändert sich, was nicht?

man von **verzweigten Systemen**. Die Vorgehensweise für die Ermittlung der Schnittgrößen ist grundsätzlich die gleiche wie bei den zuvor behandelten Systemen. Bei dem Dreigelenkrahmen hilft die Gelenkbedingung (Seite 6-19), um die „überzählige“ Auflagerreaktion berechnen zu können.

> Grundsätzlicher Ansatz: Durch Schnitte neben exponierten Stellen des Systems (z.B. Knoten, an denen mehrere Stäbe unter einem beliebigen Winkel zusammentreffen, oder Knoten, an denen Einzellasten auftreten) wird das zu berechnende System in zwei Teilsysteme zerlegt. Jedes Teilsystem muss für sich die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. An den Schnitten werden die freigelegten Schnittgrößen bestimmt und bilden die „Stützstellen“ für den Verlauf der jeweiligen Zustandsgrößen. Da alle äußeren Kräfte – also auch die Auflagerreaktionen – mit in die Gleichgewichtsbetrachtungen einbezogen werden, müssen diese in der Regel vorher bekannt sein.

Bei verzweigten Systemen ist es meist sinnvoll, die „Zweige“ wie die Finger einer Hand „abzuschneiden“, um die Schnittgrößen vor dem Verzweigungspunkt zu ermitteln. Durch den anschließenden Rundschnitt um den Verzweigungsknoten kann eine Ergebniskontrolle mittels der Gleichgewichtbedingungen vorgenommen werden.

Ein **letztes** Beispiel: Hier soll alles zusammen kommen: Dreigelenkträger, geknickte Stabachse, Verzweigungen. Zu bestimmen sind die Verläufe der Zustandsgrößen M_y, V_z und N.



Auflagerreaktionen:

Es gibt keine Momentengleichgewichtsbedingung, die explizit zur Bestimmung einer unbekannten Auflagerreaktion führt. Es sind zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen.

Hinweis: Bevor man anfängt, ist zu klären: statisch bestimmt oder statisch unbestimmt?

Wie viele Scheiben gibt es? Wenn es mehr als eine ist, dann lassen sich auch Zwischenbedingungen formulieren (z.B. die Gelenkbedingung).

Kann man Teilsysteme auch schon ohne Kenntnis der Auflagerreaktionen berechnen?

$$\Sigma\overleftarrow{M}_8 = 0: \quad +F_H \cdot 7 - q \cdot 6{,}6 \cdot 5{,}3 - M^L + H_7 \cdot 2 + V_7 \cdot 8{,}6 = 0$$

$$+56{,}0 - 209{,}88 - 18{,}0 + H_7 \cdot 2 + V_7 \cdot 8{,}6 = 0 \quad \rightarrow \quad H_7 = 85{,}94 - V_7 \cdot 4{,}3$$

$$\Sigma\overleftarrow{M}_{3,TS} = 0: \quad +V_7 \cdot 2{,}4 - H_7 \cdot 3{,}0 - 18{,}0 - 6 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 = 0$$

$$+V_7 \cdot 2{,}4 - 3{,}0 \cdot (85{,}94 - V_7 \cdot 4{,}3) - 35{,}28 = 0 \quad \rightarrow V_7 = 19{,}157\,kN$$

eingesetzt in oberer Gleichung: $H_7 = 84{,}94 - V_7 \cdot 4{,}3 = +3{,}566\,kN$

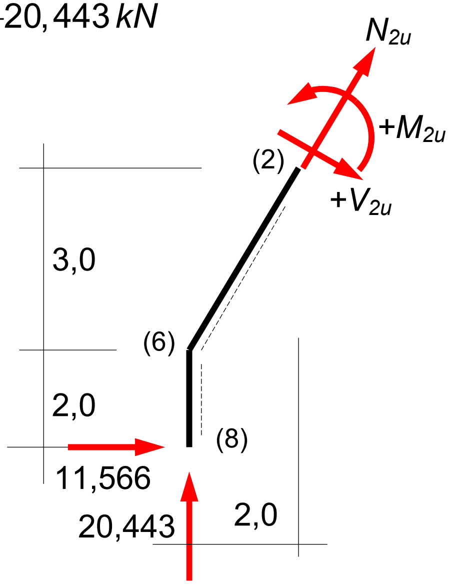
Jetzt geht es in „einfacherer“ Form weiter:

$$\Sigma\overrightarrow{H} = 0: \quad -F_H + H_8 - H_7 = 0 \quad \rightarrow \quad H_8 = +8 + 3{,}566 = +11{,}566\,kN$$

$$\downarrow \Sigma V = 0: \quad +q \cdot 6{,}6 - V_8 - V_7 = 0 \quad \rightarrow \quad V_8 = +6 \cdot 6{,}6 - 19{,}157 = +20{,}443\,kN$$

<u>Berechnung der Schnittgrößenverläufe</u>:

Mit Hilfe des Schnittprinzips am Knoten 2u ergibt sich:



$$\Sigma\overleftarrow{M}_2 = 0: \quad +M_{2,u} - 20{,}443 \cdot 2{,}0 + 11{,}566 \cdot 5{,}0 = 0$$

$$\rightarrow M_{2,u} = -16{,}944\,kNm$$

$$\Sigma K_\perp = 0: \quad +Q_{2,u} + H_8 \cdot \cos(33{,}69°) - V_8 \cdot \sin(33{,}69°) = 0$$

$$\rightarrow \quad Q_{2,u} = -11{,}566 \cdot 0{,}8321 + 20{,}443 \cdot 0{,}5547 = +1{,}716\,kN$$

$$\Sigma K_{II} = 0: \quad +N_{2,u} + H_8 \cdot \sin(33{,}69°) + V_8 \cdot \cos(33{,}69°) = 0$$

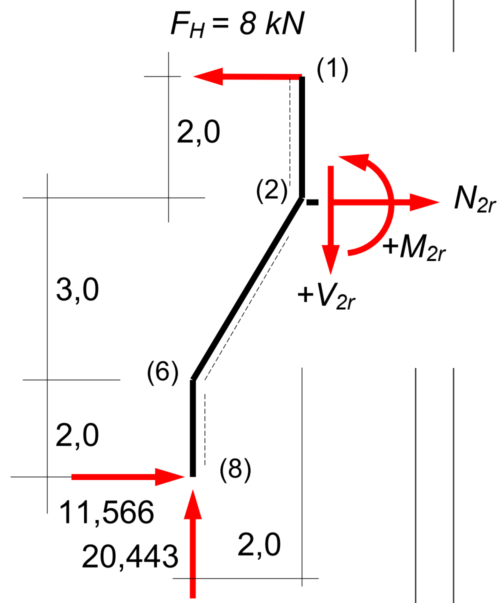
$$\rightarrow \quad N_{2,u} = -11{,}566 \cdot 0{,}5547 - 20{,}443 \cdot 0{,}8321 = -23{,}426\,kN$$

Die Querkraft und die Normalkraft müssen im Stababschnitt 6-2 konstant verlaufen. Die Biegebeanspruchung im Knoten 6 ist: $M_{6,u} = M_{6,o} = -2 \cdot 11{,}566 = -23{,}132\,kNm$

Hinweis: Die erste Gleichung legt man auf „Halde“ und setzt sie später in die 2. Gleichung ein; fertig!

Aufgabe: Bestimmen Sie die Schnittgrößen im Schnitt 2o, im Schnitt 4u und 4r. Die fertigen Schnittgrößenverläufe werden weiter unten dargestellt.

Mit Hilfe des Schnittprinzips am Knoten 2r ergibt sich:



$$\Sigma \overleftarrow{M}_2 = 0: \quad +M_{2,r} - 20{,}443 \cdot 2{,}0 + 11{,}566 \cdot 5{,}0 + 8 \cdot 2{,}0 = 0$$

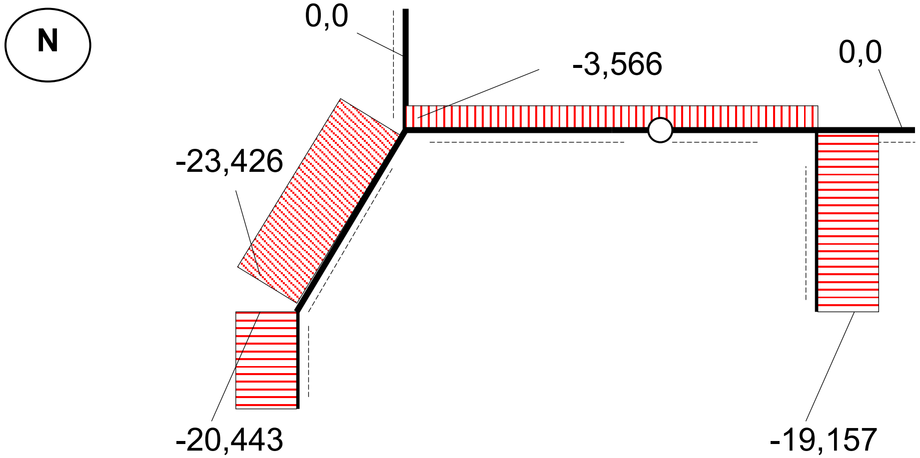
$$\rightarrow M_{2,r} = -32{,}944\ kNm$$

$$\downarrow \Sigma V = 0: \quad +Q_{2,r} - V_8 = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{2,r} = +20{,}443\ kN$$

$$\Sigma H = 0: \quad +N_{2,r} + H_8 - F_H = 0$$

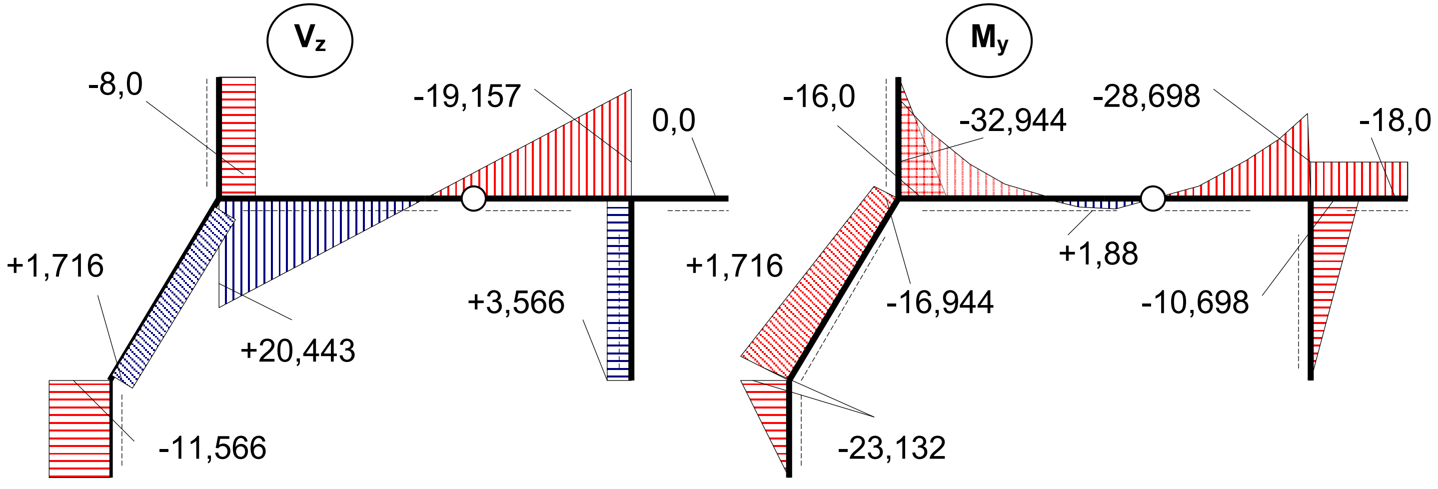
$$\rightarrow \quad N_{2,r} = -11{,}566 + 8{,}0 = -3{,}566\ kN$$

Mit ein bisschen Anschauung können die Verläufe für M_y, V_z und N jetzt dargestellt werden:



Der Normalkräfte in den lotrechten Stababschnitten lassen sich schnell über die Auflagerreaktionen V_8 bzw. V_7 ermitteln. Die auskragenden Stababschnitte (Richtung Knoten 1 bzw. 5) sind normalkraftfrei. Im Riegel zwischen Knoten 2 und 4 muss die Normalkraft konstant verlaufen, da keine weiteren H-Lasten in diesem Abschnitt angreifen. Der Querkraftverlauf in den lotrechten Stababschnitten können durch die horizontalen Auflagerreaktionen bestimmt.

Aufgabe: Kontrollieren Sie mit Hilfe des Rundschnittverfahrens um Knoten 6, ob Gleichgewicht bezüglich N und V vorhanden ist.



6.8 Ergebniskontrollen; anschauliche Ermittlung der Schnittgrößen

Auflager: Wie sieht das Auflager aus? Welche Wertigkeit hat es? In welcher Richtung bzw. um welche Achse lässt das Auflager eine Verschiebung bzw. Verdrehung zu? Mit anderen Worten: Welche **Freiheitsgrade** besitzt das Auflager? In „Richtung" eines Freiheitsgrades ist die entsprechende Auflagerreaktion nicht vorhanden (Kraftgröße gleich null).

Globales Gleichgewicht: Was an Lasten herunterkommt, muss an den Auflagern auch wieder „herauskommen". Wer schnell ΣV oder ΣH am Gesamtsystem überprüft, kann schnell feststellen, ob Lastfälle richtig überlagert und mit richtigen Teilsicherheitsfaktoren (auf der Lastseite) multipliziert worden sind. Eine beliebte Fehlerquelle ist das Eigengewicht der Konstruktion. In vielen Programmen kann dieses automatisch generiert werden. Wer das Eigengewicht dann fälschlicherweise als weiteren eigenständigen Lastfall eingibt, hat das doppelte Eigengewicht „hinein gerechnet". Gerade bei der Überlagerung von sich gegenseitig ausschließenden Lastfällen (z.B. Wind von links und von rechts) mit anderen veränderlichen Lasten kommt es schnell zu Fehlern, die man mit globalen Gleichgewichtskontrollen eliminieren kann.

Aufgabe: Kontrollieren Sie mit Hilfe des Rundschnittverfahrens um Knoten 2, ob Gleichgewicht bezüglich N, M und V vorhanden ist.

Aufgabe: Kontrollieren Sie, ob die Steigungen der linear veränderlichen M-Verläufe dem jeweiligen Wert der Querkraft entspricht.

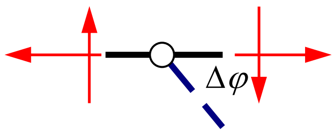
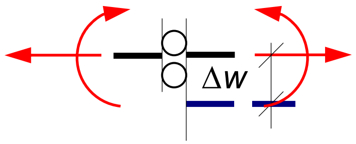
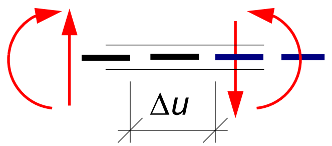
Hinweis: Die „Ratschläge" in Kapitel 6.8 sollen Ihnen nicht nur bei der Berechnung von Auflagerreaktionen und Schnittgrößen helfen, sondern auch bei der Überprüfung der Ergebnisse eines Statikprogramms. Sie sollten diese immer kritisch betrachten. Die Programme rechnen zwar (meistens) richtig. Nur wenn den Programmen falsche Eingabedaten vorgegeben werden (und das passiert häufig genug), rechnen diese auch „richtig" falsch:

GARBAGE IN = GARBAGE OUT

Prüfen Sie also auf Plausibilität. Machen Sie stichprobenartig Gleichgewichtskontrollen. Stimmen die Ergebnisse mit Ihren Erwartungen, mit Ihrer Anschauung überein?

Pendelstäbe: Das sind Stäbe, die an beiden Enden mit Momentengelenken an angrenzende Teile des Tragwerkes angeschlossen sind **und** keine Einwirkungen senkrecht zu ihrer Stabachse aufzunehmen haben. Pendelstäbe sind momenten- und querkraftfrei. Die einzig unbekannte Schnittgröße ist die Normalkraft. Greifen keine Kräfte in Längsrichtung des Stabes an, so ist der Normalkraftverlauf in Längsrichtung konstant.

Anschlüsse von Tragwerksteilen: Neben dem bekannten Momentengelenk können Tragwerksteile auch durch ein Querkraftgelenk oder ein Normalkraftgelenk verbunden sein. Charakteristisch ist, dass eine Schnittgröße gleich null ist. In Gelenken können sich die Tragwerksteile relativ zueinander verformen.

Gelenkart	Darstellung	Kraftgrößen	Relative Verformung
Momentengelenk		$M_l = M_r = 0$ $N_l = N_r$ $Q_l = Q_r$	Knick → $\varphi_l \neq \varphi_r$ $u_l = u_r$ $w_l = w_r$
Querkraftgelenk		$M_l = M_r$ $N_l = N_r$ $Q_l = Q_r = 0$	$\varphi_l = \varphi_r$ $u_l = u_r$ Klaffung → $w_l \neq w_r$
Normalkraftgelenk		$M_l = M_r$ $N_l = N_r = 0$ $Q_l = Q_r$	$\varphi_l = \varphi_r$ Spreizung → $u_l \neq u_r$ $w_l = w_r$

Bei Gelenken sollte kontrolliert werden, ob im Verlauf der Biegelinie die zugehörige Relativverformung in Erscheinung tritt. Die korrespondierende Schnittgröße muss an dieser Stelle gleich null sein. Treffen in einem Anschlusspunkt mehr als zwei Stäbe zusammen, so ist genau zu prüfen, welcher Stab wie mit dem jeweils anderen verbunden ist. Hier können „reihenweise“ Fehler gemacht werden.

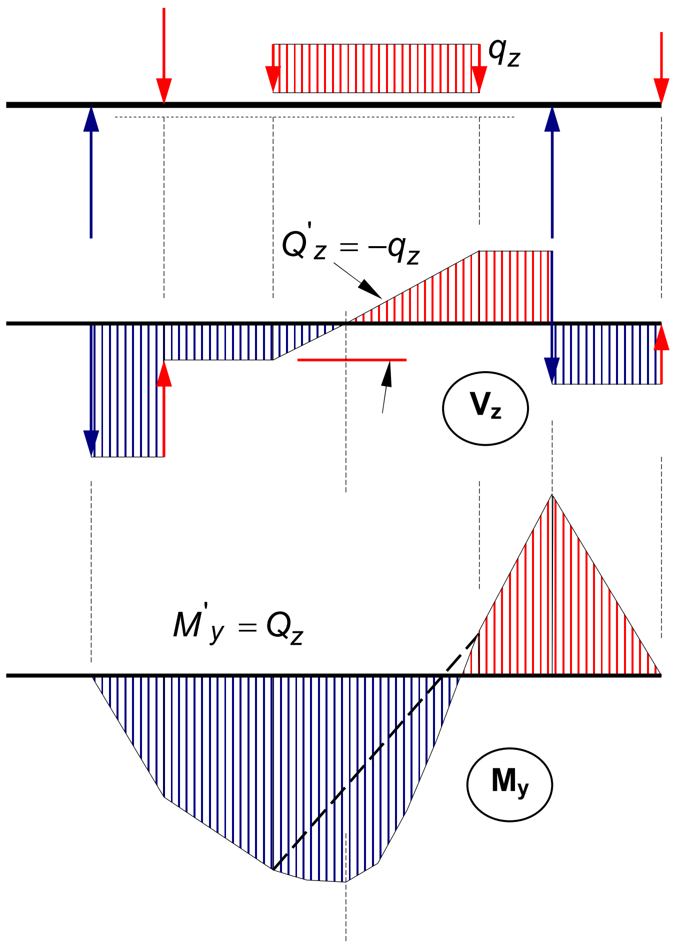
Hinweis: Bei der Modellierung von Angelenken muss das Gelenk dem Anfangs- oder dem Endpunkt des anzuschließenden Stabes zugeordnet werden. Im Anschlusspunkt müssen alle weiteren Stäbe biegesteif untereinaner verbunden sein.

Eine Ausnahme ist das Vollgelenk. Hier ist jeder Stab mit jedem anderen gelenkig verbunden (typisch bei Fachwerkkonstruktionen).

<u>Querkraftverlauf:</u> Der Verlauf der Schnittgröße V_z „springt“ – wenn man sich vom Stabanfang zum Stabende hin bewegt – der quer zur Stabachse einwirkenden Kräfte (Auflagerreaktionen, Einzellasten, Streckenlasten) entgegen. Dort wo keine Streckenlast einwirkt, ist der V-Verlauf konstant. Im Bereich einer Streckenlast gilt, dass die Steigung des V-Verlauf gleich der Größe der Streckenlast entspricht (Minuszeichen beachten).

<u>Momentenverlauf:</u> Ein wichtiger „Schlüssel“ für die Überprüfung oder Ermittlung der M-Linie ist Kenntnis der differenziellen Zusammenhänge zwischen M_y, V_z und q_z.

$$M'_y = Q_z = -q_z$$



Ist der Querkraftverlauf konstant, so ist der M-Verlauf linear veränderlich. Dort wo der V-Verlauf einen Sprung aufweist, muss im M-Verlauf ein Knick zu finden sein. Ist der V-Verlauf linear veränderlich, so ergibt sich ein parabolischer M-Verlauf. Dort, wo im V-Verlauf ein Nulldurchgang zu verzeichnen ist, muss im M-Verlauf ein Extremalwert vorliegen (Steigung gleich null).

<u>Biegelinie:</u> Zwischen den Auflagerpunkten und ggf. eingefügten Gelenken muss die Biegelinie einen kontinuierlichen Verlauf aufweisen: Knicke nur an Momentengelenken, Klaffungen nur an Querkraftgelenken und Spreizungen nur bei Normalkraftgelenken. Bei geknickten oder verzweigten Systemen bleibt der ursprüngliche Winkel zwischen zwei Stababschnitten auch nach der Belastung unverändert. An den Auflagerpunkten muss die Biegelinie mit den Freiheitsgraden korrespondieren.

Hinweis: Die nebenstehenden Anmerkungen zum V-Verlauf lassen sich analog auf den N-Verlauf bei Kräften parallel zur Stabachse übertragen.

Hinweis am Rande: In Kapitel 8 werden räumliche Stabtragwerke behandelt. Bei Querkraft in y-Richtung des Stabquerschnittes gilt:

$$Q'_y = +q_y$$

Dann springt der V_y-Verlauf nicht mehr den Kräften in y-Richtung entgegen, sondern folgt diesen.

7. Prinzip der virtuellen Arbeiten (PvA)

7.1 Prinzip der virtuellen Verrückungen (PvV)

Um zu klären, was das Prinzip der virtuellen Verrückungen bedeutet, muss zunächst der Begriff der **mechanischen Arbeit** erläutert werden. Wird eine an einem Körper wirkende Kraft F um einen Weg s verschoben, so leistet diese auf dem Verschiebungsweg Arbeit. Haben Kraft und Weg die gleiche Richtung, so kann die geleistete Arbeit (W = Work) als Produkt „Kraft (F) mal Weg (s)“ angegeben werden; es gilt:

$$W = F \cdot s$$

Eine Arbeit ist positiv, wenn die Kraftrichtung mit der Verschiebungsrichtung übereinstimmt; andernfalls negativ. Arbeit wird nicht nur von einer Kraft auf einem Weg, sondern auch von einem Moment auf einem Drehwinkel geleistet, also:

$$W = F \cdot s \qquad \text{und} \qquad W = M \cdot \varphi$$

Die Dimension der Arbeit ist [kNm]. Was bedeutet nun virtuelle Arbeit? Virtuell steht in diesem Rahmen für „künstlich“, „gedacht“ und „infinitesimal klein“. Sind also die Kraftgrößen F oder M virtuell, so können diese auf einer realen Weggröße virtuelle Arbeiten leistem. Ist anders herum der Weg bzw. der Drehwinkel virtuell (also ein gedachter unendlich kleiner Wert), so kann eine reale Kraft bzw. ein reales Moment auf der entsprechende Weggröße virtuelle Arbeiten leisten:

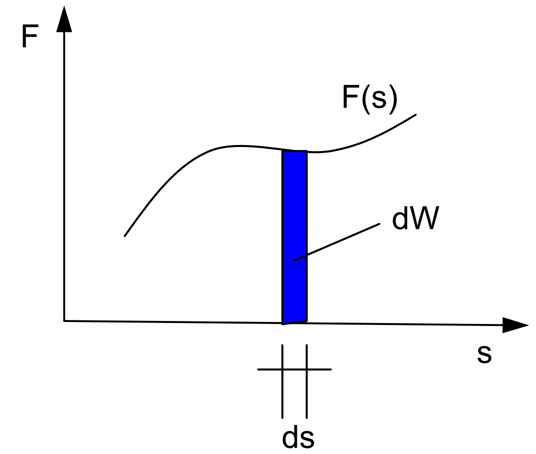
$$\overline{W} = \overline{F} \cdot s \qquad oder \qquad \overline{W} = \overline{M} \cdot \varphi$$
$$\overline{W} = F \cdot \overline{s} \qquad oder \qquad \overline{W} = M \cdot \overline{\varphi}$$

In der ersten Zeile spielen virtuelle Kräfte eine Rolle. Es werden virtuelle Arbeiten geleistet. Aus dem PvA wird nun das Prinzip der virtuellen Kräfte (PVK). In der zweiten Zeile sind es virtuelle Verschiebungen bzw. Verdrehungen. Man spricht dann vom Prinzip der virtuellen Verrückungen (PvV).

Hinweis: Mathematisch ist das Ganze ein wenig komplizierter, da die Kraft während der Verschiebung meist nicht konstant bleibt, oder Kraft und Verschiebung nicht gleichgerichtet sind.

Dann kommen wieder Sinus und Cosinus ins Spiel und es müssen infinitesimale Arbeiten über ein Integral „aufsummiert“ werden.

Die Arbeit kann als Flächeninhalt unter der Kurve F(s) interpretiert werden.

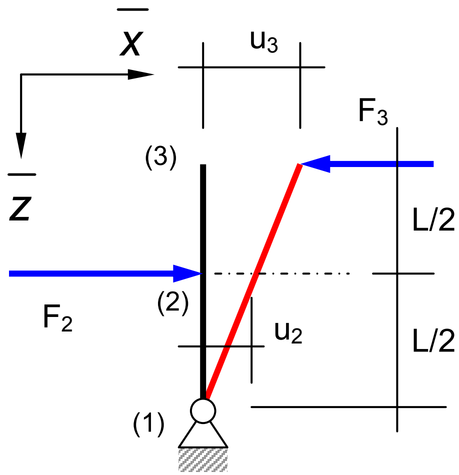


Das Prinzip der virtuellen Verrückungen besteht in der folgenden Aussage:

Ein System ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten gleich null ist.

Dabei muss die virtuelle Verrückung eine (kleine, infinitesimal kleine und gedachte) **mit den geometrischen Bindungen des Systems verträgliche**, sonst beliebige Verrückung sein.

Betrachtet man das nebenstehendes statisch unterbestimmte System und schiebt es virtuell am Kopfende um u_3 nach rechts, so erzeugt man eine kinematisch verträgliche Verschiebungsfigur. Am Auflager in Knoten (1) ist keine Verschiebung, lediglich eine Verdrehung möglich. Andernfalls wären die geometrischen Bedingungen des Systems verletzt worden. Der Knoten (1) wird zum Drehpunkt (Pol) der einzigen Scheibe dieses Systems.



Die Auslenkung wird durch u_3 vorgegeben. Die beiden Horizontalkräfte werden dabei verschoben und leisten Arbeit.
Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen muss die Summe aller (virtuellen) Arbeit gleich null sein, wenn sich das System im Gleichgewicht befinden soll; es gilt:

$$\Sigma\overline{W} = 0: \quad +F_2 \cdot u_2 - F_3 \cdot u_3 = 0$$

mit $u_2 = 0{,}5 \cdot u_3$ ergibt sich: $+F_2 \cdot 0{,}5 \cdot u_3 - F_3 \cdot u_3 = 0 \quad \rightarrow F_3 = 0{,}5 \cdot F_2$

Die in der Gleichung erhaltene Verschiebung u_3 ist ungleich null und kann gestrichen werden. Das Ergebnis ist daher unabhängig von der Größe dieser Verschiebung. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen stellt eine Alternative zur Gleichgewichtsbedingung dar. Zum Vergleich:

$$\Sigma\overrightarrow{M}_1 = 0: \quad +F_2 \cdot 0{,}5 \cdot L - F_3 \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad F_3 = 0{,}5 \cdot F_2$$

Hinweis: In der Literatur wird oft auch der Begriff „Prinzip der virtuellen Verschiebungen“ benutzt, was aber das Gleiche bedeuten soll.

Aber eine virtuelle Verdrehung ist eine Verdrehung und keine Verschiebung. Deshalb bleibe ich bei dem verallgemeinerten Begriff „Verrückung“

Hinweis: Arbeit ist gespeicherte Energie. Aus dem Energieerhaltungsgesetz ist bekannt, dass in einem geschlossenen System keine Energie verloren gehen kann. Schon deshalb muss gelten, dass alle Arbeiten, die in einem geschlossenen System geleistet werden, in der Summe null ergeben müssen.

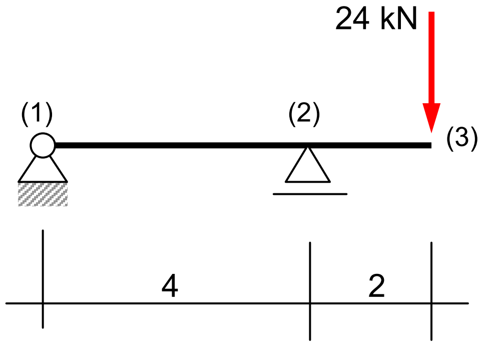
Die letzte Gleichung unterscheidet sich nur um einen Faktor. Beide Gleichungen sind somit gleichwertig.

Man nutzt diese Gesetzmäßigkeit, um mit Hilfe des PvV eine **einzelne Kraftgröße** (also eine bestimmte Auflagerreaktion oder eine bestimmte Schnittgröße innerhalb des Systems) **direkt** zu bestimmen. Wie geht das?

Ein statisch bestimmtes System muss unverschieblich sein. Es darf sich zwar elastisch unter einer Einwirkung einer Last verformen. Es nimmt jedoch nach der Entlastung die ursprüngliche stabile Lage wieder ein. Mit einem „Trick" wird aus einem statisch bestimmten System ein statisch unterbestimmtes, also verschiebliches System erzeugt (kinematische Kette). Dazu löst man eine Bindung im System. Das kann durch Wegfall einer Auflagerbindung oder durch das Einfügen eines Gelenkes innerhalb des Systems erfolgen. Das Lösen einer Bindung entspricht dem Nullsetzen der entsprechenden Kraftgröße. Diese durch das Lösen der Bindung frei gesetzte Kraftgröße wird nun als äußere (zunächst noch unbekannte) Kraftgröße aufgebracht, um die Wirkung der gelösten Bindung aufzuheben.

In Verbindung mit dem PvV entsteht nun ein leistungsfähiges Werkzeug, um damit gezielt und ohne großen Aufwand eine ganz bestimmte Kraftgröße direkt berechnen zu können. Dazu folgende Beispiele:

<ins>Beispiel (a)</ins>: Gesucht ist die vertikale Auflagerkraft des einwertigen Auflagers in Knoten 2 infolge der Einzellast am kragarmende.



<ins>Lösungsweg:</ins> Lösen der Bindung des einwertigen Auflagers on vertikaler Richtung (das Auflager „verschwindet"). Die Auflagerkraft V_2 wird als frei gesetzte Größe als äußere Last aufgebracht. Durch das Lösen der Bindung wird das vorher statisch bestimmte System zur kinematischen Kette (Pol in Knoten 1).

Hinweis: Das Lösen einer Bindung ist eigentlich nichts anderes als das, was beim Schnittprinzip gemacht wird. Die durch den Schnitt „zerstörten" Bindungen werden durch äußere (sichtbar gemachte) Schnittgrößen ersetzt. Der Unterschied besteht darin, dass nicht alle Bindungen gelöst werden, sondern nur jeweils die, die der betrachteten Schnittgröße entspricht.

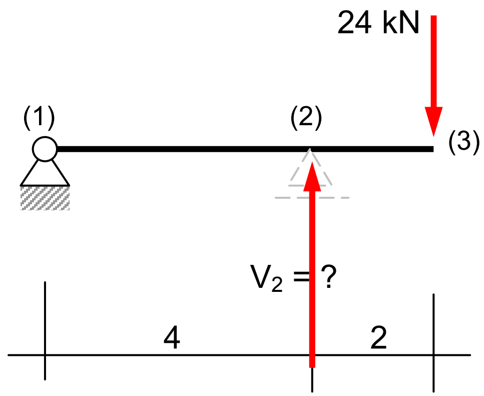
Dieses selektive Schnittprinzip nennt man **Lagrange'sche Befreiung**.

Herr Joseph-Louis Comte de Lagrange lebte von 1736 bis 1813 und war ein französischer Mathematiker und Astronom.

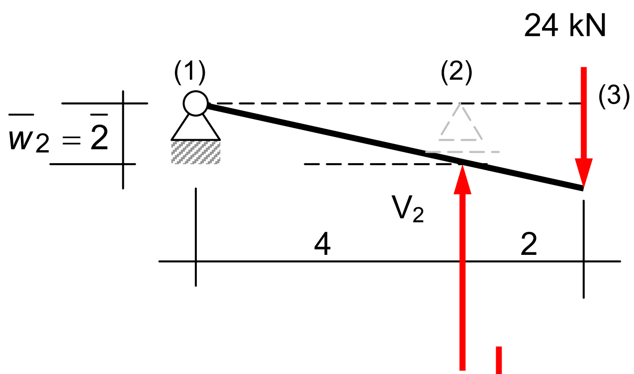
Es wird eine kinematisch verträgliche Verschiebungsfigur aufgebracht; z.B. durch das Absenken des Knotens 2 um den virtuellen Weg: $\overline{w}_2 = \overline{2}$

Aufgrund der geometrischen Verhältnisse wird sich dabei der Knoten 3 um $\overline{w}_3 = \overline{2} \cdot 6/4 = \overline{3}$ nach unten verschieben. Auf den Verschiebungswegen leisten die Kräfte folgende virtuelle Arbeit:

$$\Sigma\overline{W} = 0: \quad +24 \cdot \overline{3} - V_2 \cdot \overline{2} = 0 \qquad \rightarrow V_2 = 36\ kN$$

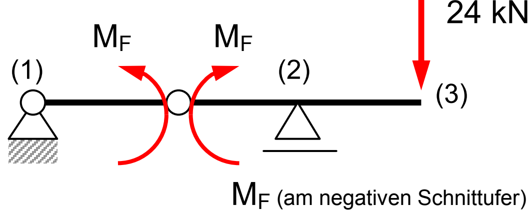


Zu bemerken ist, dass V_2 negative Arbeit leistet, da die Auflagerkraft entgegen ihrer Kraftrichtung nach unten gedrückt worden ist.

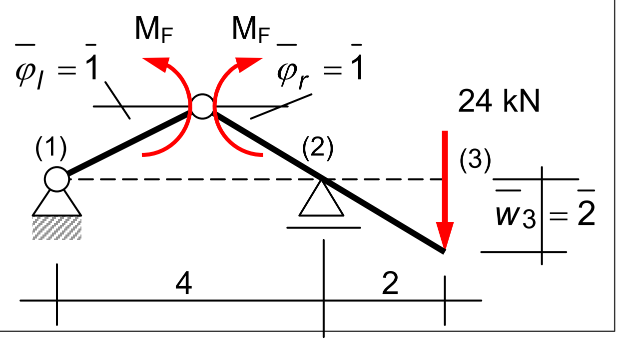


Beispiel (b): Gesucht ist das Feldmoment in der Mitte des Feldes zwischen Kn. 1 und 2.

Lösungsweg: Lösen der Momentenbindung durch Einfügen eines Momentengelenks und dem Ansetzen eines Momentenpaares als freigeschnittene Schnittgröße (Hinweis beachten!).



Eine kinematisch verträgliche virtuelle Verschiebungsfigur muss die in vertikaler Richtung unverschieblichen Auflagerknoten berücksichtigen. Es entsteht ein „geknickter" Träger. Die Momente leisten auf dem Knickwinkel virtuelle Arbeit. Gleichzeitig wird virtuelle Arbeit am Kragarmende geleistet.



Hinweis: Alle virtuellen Größen werden ab sofort als „Dachgröße" gekennzeichnet.

Aufgabe: Bearbeiten Sie die nebenstehende Aufgabe ein zweites Mal. Wählen Sie dabei eine virtuelle Verschiebungsfigur, die im Knoten 3 eine nach oben gerichtet Verschiebung von 12 aufweist.

Hinweis: Wie beim Schnittprinzip auch, treten Schnittgrößen innerhalb des Systems als Doppelgröße auf. Die Drehrichtung der Momentenpfeile bzw. die Kraftrichtungen der Normal- und Querkräfte sollten sich an der üblichen Vorzeichenregelung orientieren.

Der Knickwinkel in Feldmitte kann durch eine einfache Betrachtung gewonnen werden. Da die Kragarmspitze um den Wert 2 nach unten verschoben wird, muss die gleich weit vom Knoten 2 entfernte Feldmitte sich um 2 nach oben bewegen. Der Winkel ergibt sich nun aus tan φ = GK / AK. Da φ jedoch ein infinitesimal kleiner Winkel ist, gilt (bitte immer merken):

$$\tan\varphi \approx \varphi \quad \rightarrow \varphi \approx \frac{GK}{AK}$$

Da in beiden Fällen neben dem Gelenk die Gegenkathete der Ankathete entspricht, entsteht als virtueller Drehwinkel für das Moment am linken Schnittufer und für das am rechten Schnittufer jeweils der Winkel 1. Die Drehrichtung der Winkel stimmt mit der Drehrichtung der jeweiligen Momente überein, so dass hier eine positive Arbeit entsteht.

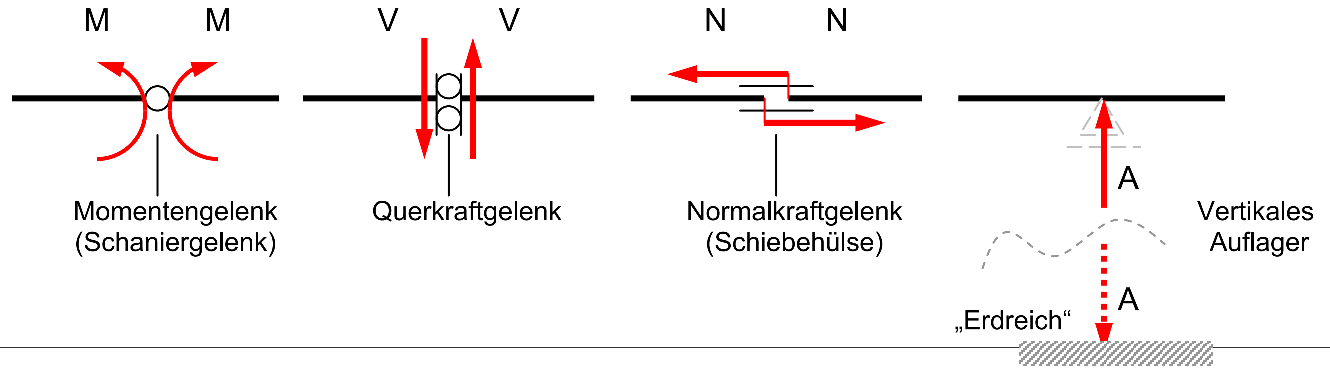
$$\Sigma\overline{W} = 0: \quad +M_F \cdot \bar{1} + M_F \cdot \bar{1} + 24{,}0 \cdot 2 = 0 \qquad \rightarrow M_F = -24\ kNm$$

Hinweis: Aufgrund des infinitesimal kleinen Winkels bleibt natürlich auch der Abstand zwischen Knoten 1 und 3 in horizontaler Richtung gemessen weiterhin 6 m. Die Darstellung der Stababschnitte muss deshalb grafisch verzerrt werden, um die Verschiebungsfigur deutlich zu machen.

7.2 Berechnung einzelner Kraftgrößen mit Hilfe des PvV

Die beiden Einführungsbeispiele in Kap. 7.1 haben gezeigt, dass man gezielt einzelne Schnittgrößen oder Auflagerreaktionen ohne die Verwendung von Gleichgewichtsbeziehungen berechnen kann. Es sind unabhängig von der gesuchten Kraftgröße immer folgende Schritte durchzuführen:

1. Durchführen der Lagrange'schen Befreiung am Ort der gesuchten Kraftgröße; d.h. Lösen der zugehörigen Bindung und Ansetzen der unbekannten Doppelgröße.



2. Erstellung des Polplans, der Auskunft darüber gibt, ob und in welcher Richtung und auf welchem Weg sich die Teilsysteme des verschieblichen Systems verschieben können.

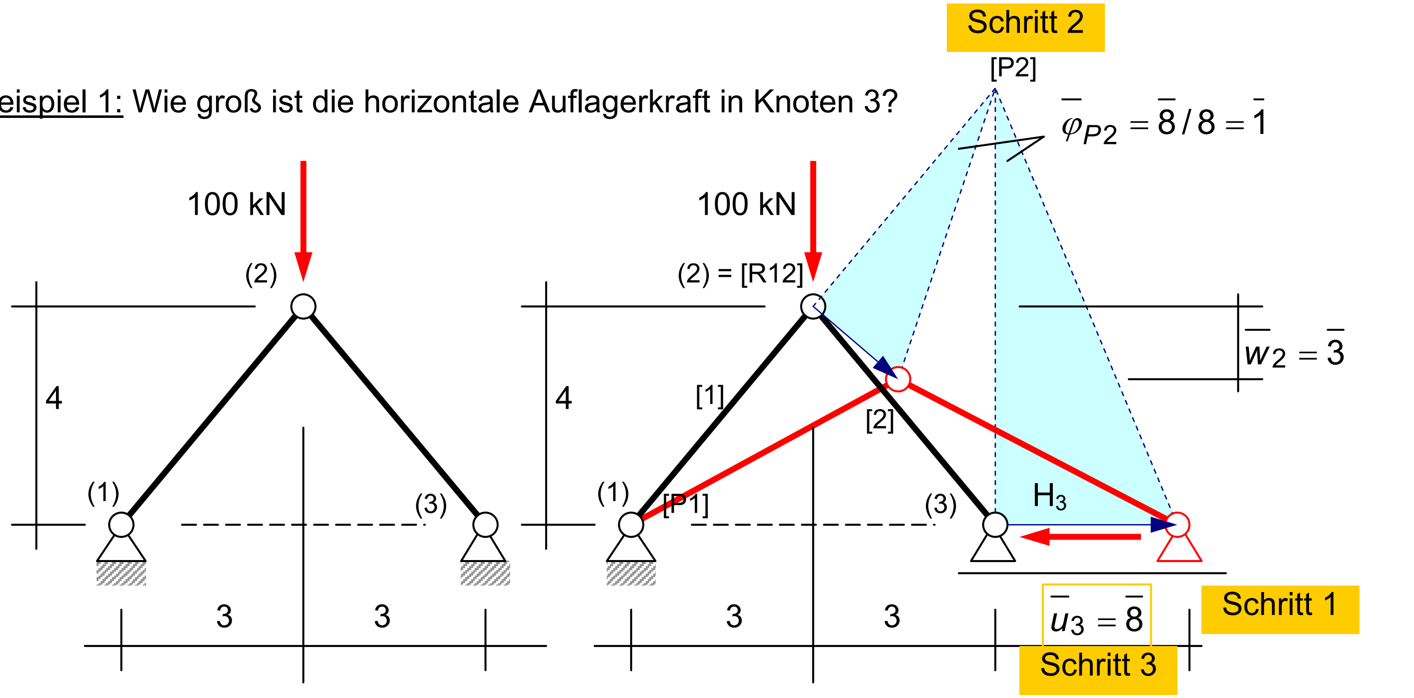
Hier einige Tipps:

- Feste Auflager sind Absolutpole
- Bei verschieblicher Einspannung liegt der Absolutpol senkrecht zur möglichen Bewegungsrichtung im Unendlichen
- Die Polstrahlen (siehe Hinweis) stehen senkrecht zur möglichen Bewegungsrichtung von verschieblichen Auflagern
- Der Relativpol und die Absolutpole zweier Scheiben liegen auf einer Geraden. Fallen zwei dieser Punkte zusammen, so liegt der dritte auch dort.

3. Vorgeben einer virtuellen Verrückung (Richtung muss kinem. verträglich sein, Größe egal)

4. Aufstellen der Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen und Bestimmung der unbekannten Bindungskraftgröße.

Beispiel 1: Wie groß ist die horizontale Auflagerkraft in Knoten 3?



Hinweis: Ein Absolutpol ist ein unverrückbarer Fixpunkt, um den sich ein oder mehrere Teilsysteme drehen können (gedanklich können Sie hier einen Nagel in Ihren Schreibtisch einschlagen; vgl. [P2] oder [P1]).

Als Relativpol oder Nebenpol bezeichnet man den Punkt, an dem zwei Scheiben den gleichen Verschiebungsvektor besitzen (meist ist es der Gelenkpunkt, an dem beide Scheiben miteinander verbunden sind). Im Relativpol können sich zwei Scheiben relativ zueinander verdrehen (vgl. [R12])

Aufgabe: Komplettieren Sie das nebenstehende Bild und zeichnen Sie alle virtuellen Verformungsgrößen dazu.

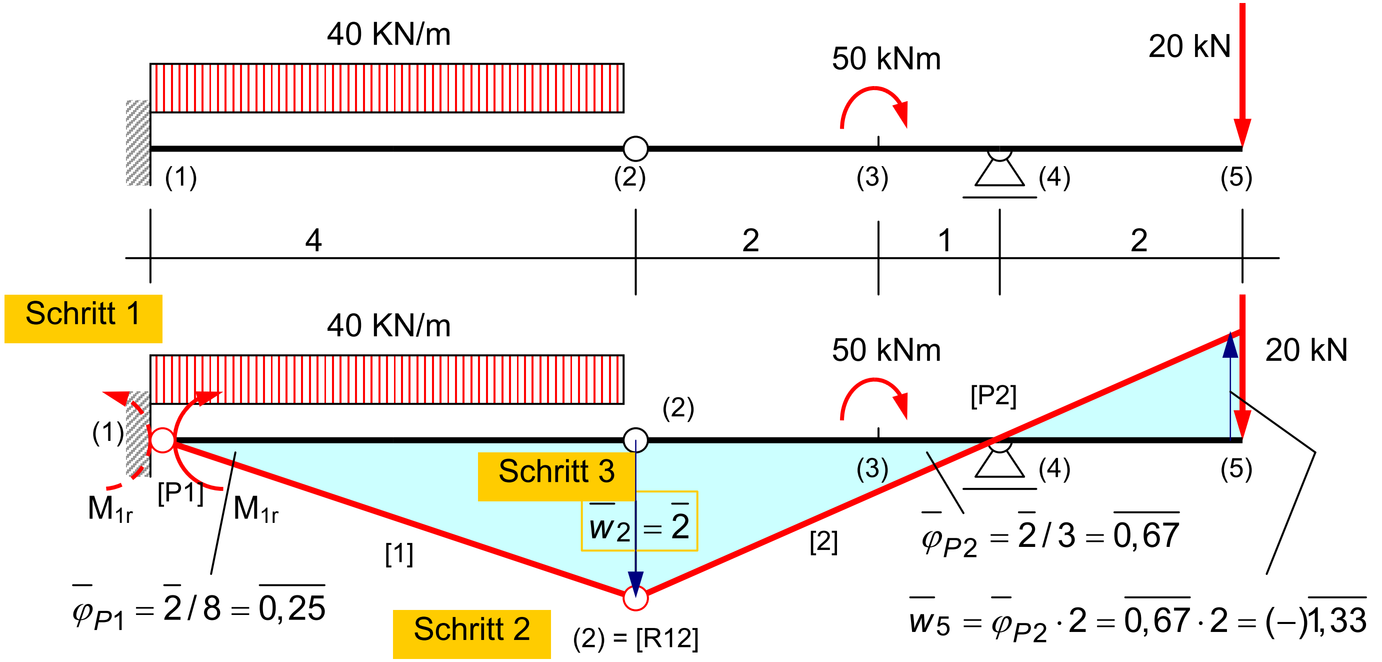
Warum ist $\overline{w}_2 = \overline{3}$?

Hinweis: Die blauen Pfeile geben die virtuellen Verschiebungen der Knoten 2 und 3 an. Diese stehen immer senkrecht zu den Polstrahlen; hier die Verbindungslinien zwischen [P2] und (2) bzw. zwischen [P2] und (3).

Der letzte Schritt, Schritt 4 ist die Auswertung der Arbeitsgleichung des PvV; also:

$$\Sigma \overline{W} = 0: \quad +100 \cdot \overline{3} - H_3 \cdot \overline{8} = 0 \qquad \rightarrow H_3 = +37,5\ kN$$

Beispiel 2: Gegeben ist ein Gelenkträger mit unterschiedlichen Lastarten. Wie groß ist das Biegemoment und die Querkraft rechts von Knoten 1 ?



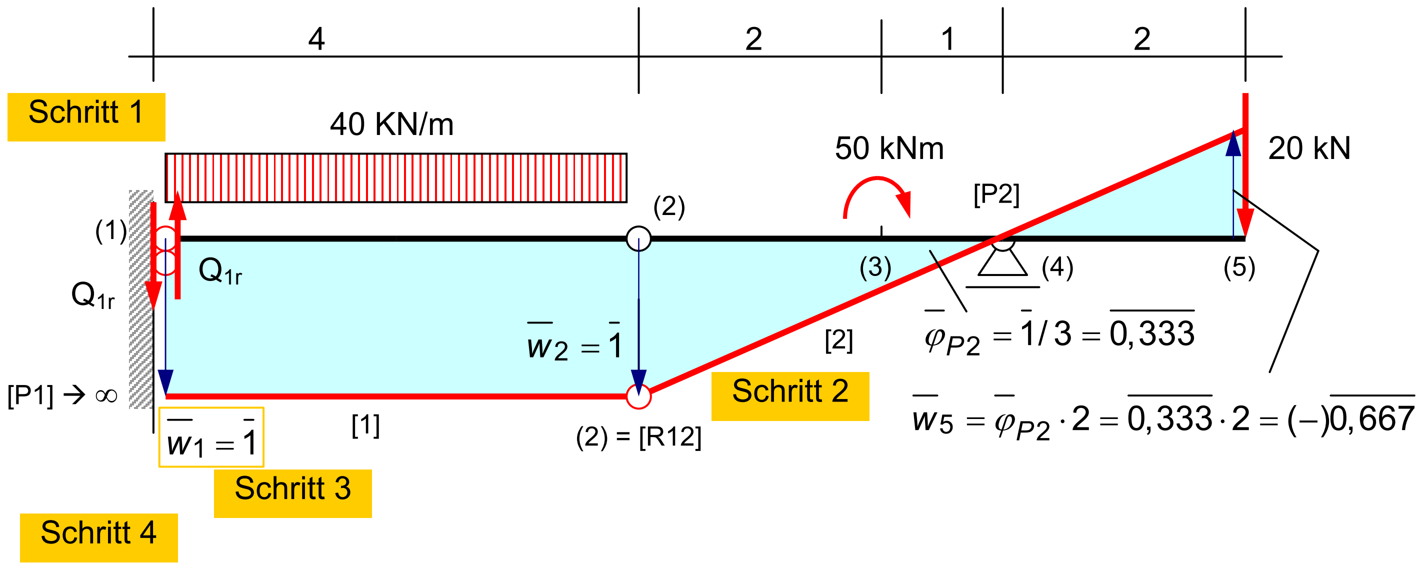
Schritt 4

$$\Sigma \overline{W} = 0: \quad +M_{1r} \cdot \overline{0,25} + 40 \cdot 4 \cdot \overline{1,0} - 50 \cdot \overline{0,667} - 20 \cdot \overline{1,333} = 0 \quad \rightarrow M_{1r} = -400,0\ kNm$$

Das Lastmoment in Knoten 3 wird entgegen seiner Drehrichtung verdreht und leistet somit einen negativen Arbeitsanteil. Knoten 4 ist ein Fixpunkt und damit der Pol für Scheibe [2]. Das Moment M_{1r} links vom Knoten 1 kann keine Arbeit leisten. Die Einspannung hält sie fest. Jetzt zur Querkraft....

Hinweis: Bei einer Streckenlast kann „scheibenweise“ eine Resultierende gebildet werden; hier R = 40 · 4 = 160 kN. Ihr virtueller Weg ist halb so groß wie der des Knotens 2.

Aufpassen: „Scheibenweise“ heißt, dass Sie keine Resultierende für eine Streckenlast bilden dürfen, die über Gelenkpunkte (oder Knickpunkte) hinweggeht.



$$\Sigma\overline{W} = 0: \quad -Q_{1r} \cdot \overline{1,0} + 40 \cdot 4 \cdot \overline{1,0} - 50 \cdot \overline{0,333} - 20 \cdot \overline{0,667} = 0 \quad \rightarrow Q_{1r} = +130,0\ kN$$

Wenn die virtuelle Verschiebungsfigur - so wie bei diesem letzten Beispiel gezeigt – so geschickt gewählt wird, dass die unbekannte Kraftgröße (hier also V_{1r}) eine der Kraftrichtung **entgegengesetzte** virtuelle Verschiebung der Größe $(-)\overline{1}$ erfährt, so lässt sich die „Auswertung“ der Verschiebungsfigur ganz einfach vornehmen:

$$Q_{1r} = +40 \cdot 4 \cdot 1,0 - 50 \cdot 0,333 - 20 \cdot 0,667 = +130,0\ kN$$

Die Division durch $\overline{1}$ in der Arbeitsgleichung kürzt den virtuellen „Charakter“ der weiteren Verschiebungsgrößen heraus. Die Größe für V_{1r} lässt sich (hinter dem Gleichheitszeichen) einfach aufsummieren. Die Verschiebungsgrößen wandeln sich damit zu „Lastfaktoren“, die den **Anteil** der jeweiligen Lasten an der gesuchten Querkraft bestimmen; so steuert z.B. die Einzellast im Knoten 5 einen Anteil von -20 · 0,667 = -13,333 kN an der Querkraft V_{1r} bei.

Diese Betrachtungsweise wird im nächsten Kapitel eine besondere Rolle spielen.

Hinweis: Die Scheibe [1] darf sich aufgrund des Querkraftgelenkes nicht verdrehen. Als einzige Verschiebungsmöglichkeit bleibt eine Translation. Der Absolutpol dieser Scheibe liegt damit im Unendlichen.

Begriffe:

Translation: Eine Verschiebung in beliebiger Richtung ohne Verdrehung.

Rotation: Eine Verdrehung um einen Fixpunkt ohne Verschiebung.

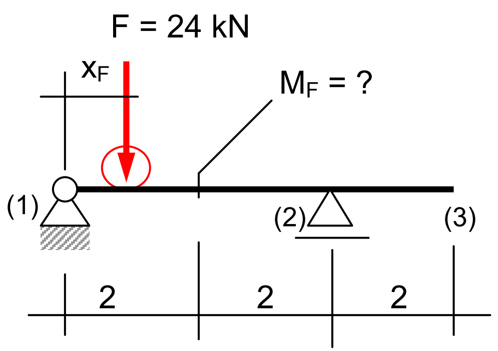
Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe des PvV die vertikale Auflagerkraft V_4 für das nebenstehende System aus.

7.3 Ermittlung von Einflusslinien für einzelne Kraftgrößen

Bislang wurden statische Systeme betrachtet, bei denen die Belastung an einem festen Ort vorgegeben war. Das Ergebnis der Betrachtung waren die zu dieser Belastung gehörenden Zustandslinien für M, Q und N. Es gibt jedoch Problemstellungen, bei denen der Angriffsort der Belastung nicht fest, sondern variabel ist. Dies gilt insbesondere für Verkehrslasten, die sich auf dem Tragwerk bewegen können. Nun ist es die Aufgabe der Tragwerksplaner, das Tragwerk so auszulegen und zu dimensionieren, dass an jeder Stelle die maximale Beanspruchung sicher aufgenommen werden kann. Die Tragwerksplaner müssen dann natürlich wissen, bei welcher Laststellung die Beanspruchung in einem bestimmten Punkt des Tragwerks extremal, also minimal oder maximal wird.

Man untersucht also eine Schnittgröße an einem festen Ort infolge einer Belastung an einem veränderlichen Ort. Genau diese Information liefert die **Einflusslinie**. Im Unterschied dazu lieferte die **Zustandslinie** (also der M-Verlauf oder der Querkraftverlauf) eine Schnittgröße an einem veränderlichen Ort infolge einer Belastung an einem festen Ort.

Machen wir uns das am folgenden Beispiel klar: Gegegen ist eine beweglich Einzellast F, die zwischen Knoten 1 und 3 beliebig einwirken kann ($0 <= x_F <= 6$m). Was verhält sich dabei das Biegemoment M_F in Feldmitte des Stabes zwischen Knoten 1 und 2? Bei welcher Laststellung nimmt es extremale Werte an? Aus der statischen Berechnung erhalten wir folgende Ergebnisse:



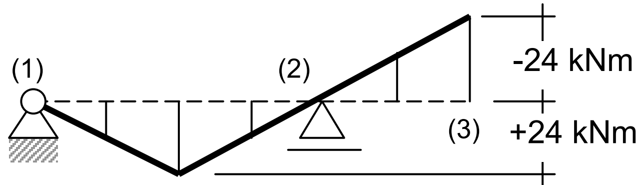
x_F	M_F
0,0	0,0
1,0	+12,0
2,0	+24,0
3,0	+12,0
4,0	0,0
5,0	-12,0
6,0	-24,0

Hinweis: Wer einen interaktiven Einstieg in das Thema „Einflusslinien“ haben möchte, probiert die Excel-Datei

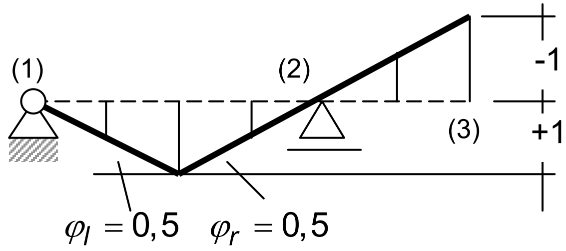
„EFLinien100.xls“

einmal aus (vgl. Verzeichnis „Lehrmaterialien“ im Bereich Baustatik auf Laufwerk I: der Hochschule)

Tragen wir die Tabellenwerte einmal in Diagrammform auf, so bekommen wir ein überraschendes Ergebnis:



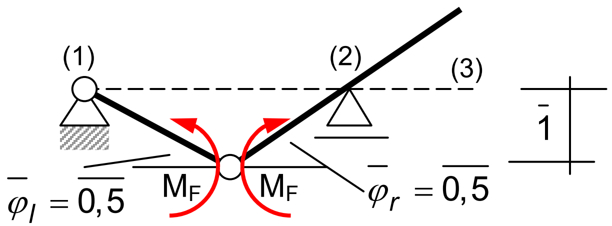
Aufgrund der Linearität der Theorie genügt es, als Belastung eine Einheitskraft F = 1 zu betrachten. Durch die Normierung entsteht der nebenstehende Verlauf. Damit ist die **Einflusslinie** für das Feldmoment gegeben. Ist irgendeine Last F gegeben, so ist nur die Lastgröße mit der Ordinate der Einflusslinie an der aktuellen Lastposition zu multiplizieren.



Steht eine bewegliche Last von z.B. 200 kN am Kragarmende, so ist das dazugehörige Feldmoment $M_F = 200 \cdot (-1) = -200$ kNm der Last. Die Auswertung ist einfach. Es ist sofort zu sehen, bei welcher Laststellung sich das größte positive Moment in Feldmitte einstellt, nämlich bei $x_F = 2$ m. Die Auswertung der Einflusslinie ergibt: Bei $x_F = 0$ und 4 m ist die Feldmitte biegemomentenfrei. Die extremalen Biegemomente in Feldmitte sind:

$$\max M_F = 200 \cdot 1 = 200\ kNm; \qquad \min M_F = 200 \cdot (-1) = -200\ kNm$$

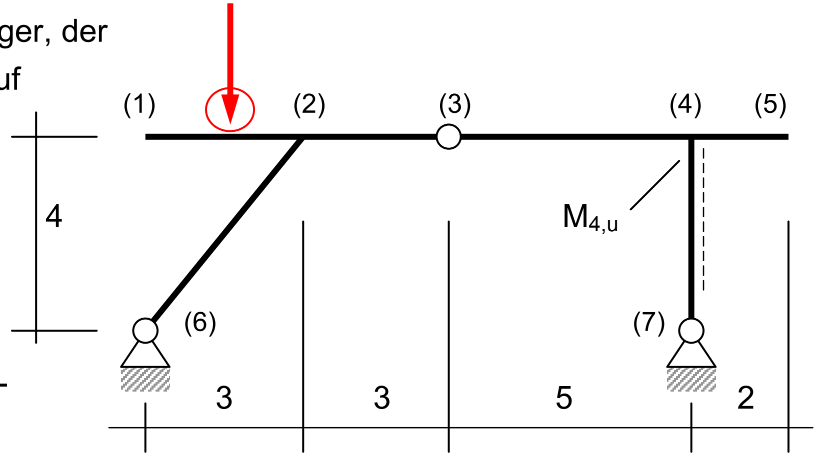
Der Vergleich der obigen Einflusslinie mit der virtuellen Verschiebungsfigur auf Seite 7-4 zeigt, dass die Einflusslinie den gleichen Verlauf aufweisen würde, wenn man die virtuelle Verschiebungsfigur so entwickelt, dass am Ort der gelösten Bindung (hier das M-Gelenk in Feldmitte) ein virtueller Drehwinkel der Größe 1 entgegen der Drehrichtung der freigeschnittenen Doppelgröße M_F entsteht. Die Einflusslinienentwicklung kann damit auf die Ermittlung einer speziellen virtuellen Verschiebungsfigur zurückgeführt werden.



Definition der Einflusslinie: Eine Einflusslinie $\eta(x)$ für eine Schnittgröße im Punkt i gibt an, wie groß die Schnittgröße in diesem Punkt ist, wenn eine Kraft F = 1 an der Stelle x wirkt.

Merke: Die Einflusslinie einer Kraftgröße ist gleich der Verschiebungsfigur des Systems, wenn diesem nach dem Lösen der zugehörigen Bindung eine der Kraftgröße entgegen gerichtete Einheitsverformung aufgezwungen wird.

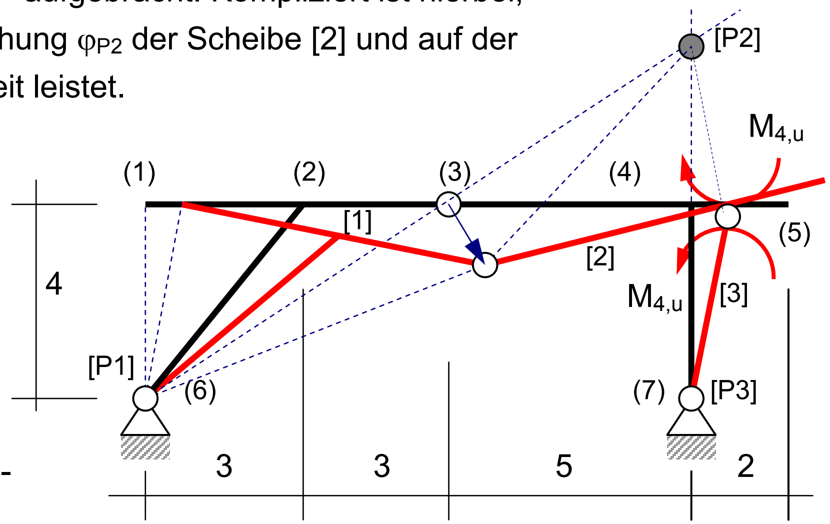
Beispiel 1: Gegeben ist ein Dreigelenkträger, der eine beliebige positionierbare Einzellast auf den horizontalen Tragwerksteilen aufzunehmen hat. Als Erstes soll die Einflusslinie (EL) für das Moment $M_{4,u}$ entwickelt und ausgewertet werden.



Dazu wird die Momenten-Bindung unterhalb des Knotens 4 gelöst und die Doppelgröße $M_{4,u}$ als freigelegte Bindungsgröße eingezeichnet. Es entsteht eine kinematische Kette (n = -1).

Es wird im „neuen“ Gelenkpunkt eine dem Moment $M_{4,u}$ entgegen gerichtete Einheitsverformung, also ein Knick von „-1“ aufgebracht. Kompliziert ist hierbei, dass die Doppelgröße $M_{4,u}$ auf der Verdrehung φ_{P2} der Scheibe [2] und auf der Verdrehung $\varphi_{P2} \neq \varphi_{P3}$ der Scheibe [3] Arbeit leistet.

Der Knick setzt sich somit aus zwei Teilwinkeln zusammen, die folgende Bedingung erfüllen müssen:



$$M_{4,u} \cdot \overline{\varphi}_{P2} + M_{4,u} \cdot \overline{\varphi}_{P3} = M_{4,u} \cdot \overline{1}$$

Nehmen wir zunächst an, dass $\overline{\varphi}_{P3} = \overline{1}$ ist, so schieben sich die horizontalen Tragwerksteile um 4 nach rechts; es gilt:

$$\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = \overline{u}_4 = \overline{u}_5 = \overline{4{,}0}$$

Knoten (3) wird zwangsläufig bei diesem Weg $\overline{w}_3 = \overline{6}$ nach unten gehen und damit Scheibe [2] um

Hinweis: Sie können Einflusslinien problemlos mit dem Statikprogramm „Ruckzuck“ erstellen. Dazu rufen Sie über die Menüfolge „Belastung – Zwangseinbau“ oder alternativ über das „Kneifzangen-Symbol“ einen Dialog auf, der Ihnen die Möglichkeit gibt, an einem bestimmten Ort eine ausgewählte Bindung freizugeben und eine Zwangsweggröße mit dem Wert „-1“ einzuprägen. Die entsprechende Einheits-Verschiebungsfigur wird dargestellt (Bitte ausprobieren!).

Beachten: Die positive Faser zeigt an, dass der Stab bei Knoten 7 beginnt und in 4 endet. Ein positives Moment erzeugt somit Zug auf der Außenseite. Wäre die positive Faser auf der anderen Seite, so müsste die Einflusslinie in anderer „Richtung“ entwickelt werden.

Aufgabe: Lassen Sie sich mit Hilfe des Programms die Einflusslinie für $M_{2,u}$ anzeigen. Wo muss die Wanderlast stehen, damit $M_{2,u}$ maximal wird; wo, damit $M_{2,u}$ minimal wird?

den Winkel $\overline{\varphi}_{P2} = \overline{6}/5 = \overline{1,2}$ verdrehen. Aufgrund der Bedingung, dass $\overline{\varphi}_{P2} + \overline{\varphi}_{P3} = \overline{1}$ sein muss, wird der gewählte „Startwinkel“ auf $\overline{\varphi}_{P3} = \overline{1}/(1-1,2) = \overline{0,4545}$ gesetzt, um eine Normierur -24 kNm Gesamtwinkel zu erhalten. Damit ergeben sich folgende Verschiebungsgrößen und Winkel für die gesuchte Einflusslinie.

Knoten i	**u_i**	**w_i**		**Scheibe j**	**$\lvert\varphi_j\rvert$**
1	1,8182	0,0		1	0,4545
2	1,8182	1,3636		2	0,5455
3	1,8182	2,7273		3	0,4545
4	1,8182	0,0			
5	1,8182	-1,0909			
6	0,0	0,0			
7	0,0	0,0			

Die Auswertung der Einflusslinie liefert folgende Ergebnisse. Steht die Wanderlast mit einer Größe von beispielsweise F = 200 kN im Knoten 3, so wird das Biegemoment $M_{4,u}$ maximal

$$\max M_{4,u} = +\,200 \cdot 2,7273 = +545,46\ kNm$$

Bei einer Laststellung im Knoten 5 ergibt sich das minimale Moment:

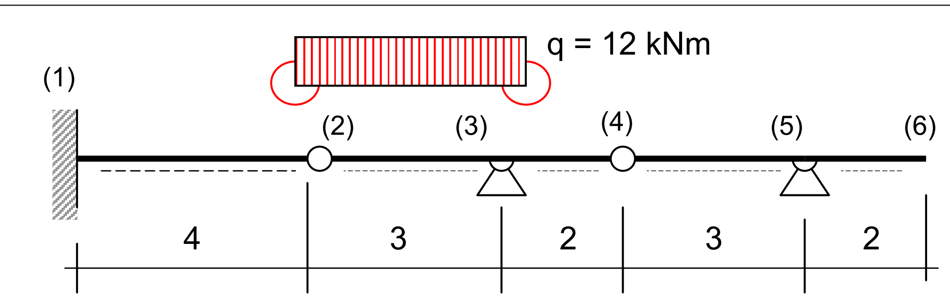
$$\min M_{4,u} = -\,200 \cdot 1,0909 = -218,18\ kNm$$

Bei einer Laststellung im Knoten 1 oder 4 bleibt die untersuchte Stelle biegemomentenfrei.

Beispiel 2: Dieses Mal etwas Einfacheres, aber mit neuen Fragestellungen. Gegeben ist ein mehrfeldriger Gelenkträger, die eine veränderliche Streckenlast q [kN/m] aufzunehmen hat. Es stellt sich die Frage, auf welchen Stababschnitten muss q aufgebracht werden, damit eine bestimmte Schnittgröße oder Auflagerreaktion extremale Werte annimmt.

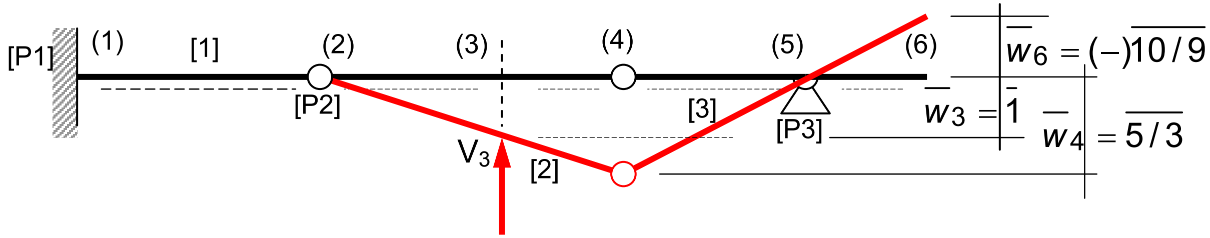
Hinweis: Bei den Vorzeichen für u, w und φ könnte man sich am globalen Koordinatensystem orientieren. Um die Arbeitsgleichung des PvV richtig und vorzeichengerecht auszuwerten, müssten auch die Lasteinwirkungen konsequent im globalen System definiert werden, um positive oder negative Arbeitsanteile richtig erfassen zu können.

Für das Verständnis reicht es aber aus, sich auf die Anschauung zu verlassen.



<u>Fragestellung 1</u>: Wie sieht die Einflusslinie für die vertikale Auflagerkraft V3 aus. Wo muss die veränderliche Streckenlast aufgebracht werden, damit V3 maximal (oder minimal) wird?

<u>Lösung:</u> Im Knoten 3 wird die vertikale Auflagerbindung gelöst und die unbekannte Bindungsgröße V_3 angetragen. Entgegen der Kraftrichtung min V_3 wird eine **virtuelle Einheitsverschiebung** aufgebracht. Damit ist die EL-V_3 gegeben.



<u>Auswertung:</u> Die maximale Auflagerkraft max V_3 ergibt sich bei einer Laststellung der veränderlichen Streckenlast q zwischen den Knoten 2 und 5:

$$\max V_3 = +12 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} + 12 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} = 80{,}0\ kN$$

Die minimale Auflagerreaktion stellt sich dann ein, wenn die Streckenlast auf dem Kragarm zwischen Knoten 5 und 6 wirkt (Last auf Stababschnitt zwischen Knoten 1 und 2 hat keinen Einfluss auf V_3):

$$\min V_3 = -12 \cdot 2 \cdot \frac{5}{9} = -13{,}33\ kN$$

Wäre auf diesem System lediglich eine einzelne punktförmige Last vorhanden, so müsste diese im Knoten 3 für max V_3 bzw. im Knoten 6 für min V_3 stehen.

Frage: Warum taucht keine Dachgröße mehr in den nebenstehenden Gleichungen auf?

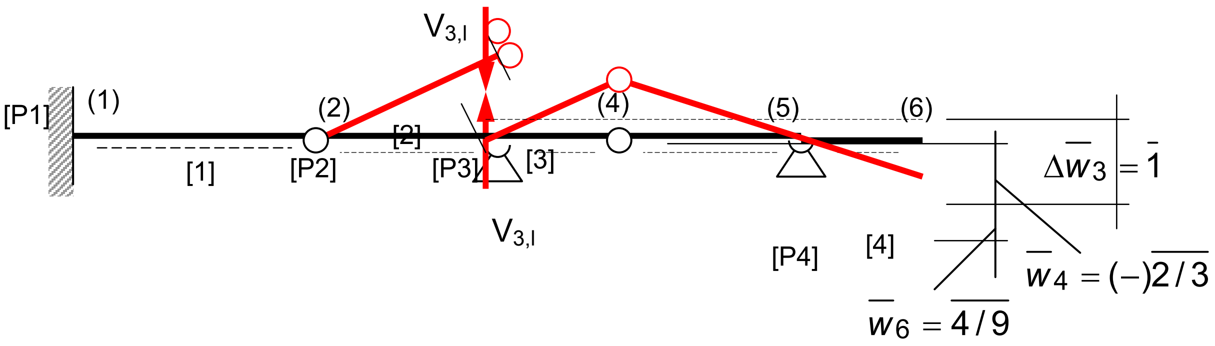
Antwort: Der Arbeitsanteil

$$\Sigma \overline{W} = 0: \quad \ldots - V_3 \cdot \overline{1} \ldots$$

wird vor das Gleichheitszeichen gezogen. Durch Division mit $\overline{1}$ der gesamten Gleichung wird der virtuelle Anteil heraus gekürzt.

<u>Fragestellung 1</u>: Wie sieht die Einflusslinie für die Querkraft $V_{3,l}$ links neben Knoten 3. Wo muss dann die veränderliche Streckenlast aufgebracht werden, damit $V_{3,l}$ maximal (oder minimal) wird?

<u>Lösung:</u> Links neben Knoten 3 wird ein Querkraftgelenk eingesetzt, um $V_{3,l}$ zu lösen. Beim Aufbringen der **virtuellen Einheitsverschiebung** muss beachten werden, dass die Drehwinkel der angrenzenden Scheiben gleich groß sein müssen.



<u>Auswertung:</u> Die maximale Querkraft stellt sich durch eine Streckenlast auf dem Kragarm zwischen Knoten 5 und 6 ein. Sie errechnet sich durch:

$$\max V_3 = 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} = 5{,}333\ kN$$

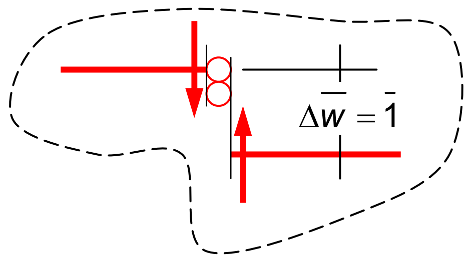
Die minimale Querkraft ergibt sich bei einer Laststellung zwischen Knoten 2 und 5:

$$\min V_3 = -12 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = -38{,}0\ kN$$

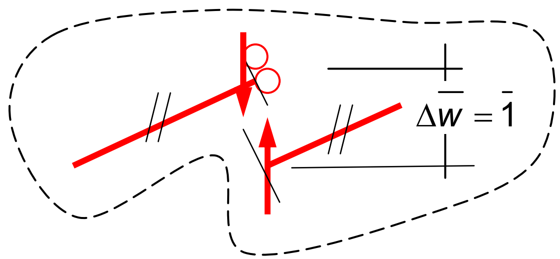
Wäre auf diesem System lediglich eine einzelne punktförmige Last vorhanden, so müsste diese im Knoten 3 für min $V_{3,l}$ bzw. im Knoten 6 für max $V_{3,l}$ stehen.

Anmerkung: Beim Querkraftgelenk neigen die Studierenden zum Augenrollen. Alles ganz einfach:

a) Einheitsspreizung aufbringen



b) Drehen des „Details“, bis die kinematischen Bedingungen erfüllt sind. (auch wenn es schwer zu zeichnen ist).



Aufgabe: Neben Sie das nebenstehende System, um Einflusslinien für andere Auflagerreaktionen oder Schnittgrößen zu entwickeln.

Wie sieht z.B. die Einflusslinie für $N_{1,r}$ aus? Es kommt ein wenig überraschendes Ergebnis zustande.

7.4 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Wodurch unterscheidet sich das Prinzip der virtuellen Kräfte vom Prinzip der virtuellen Verrückungen? Die nachfolgende Zusammenstellung gibt einen Überblick.

Prinzip der virtuellen Verrückungen (PvV)	Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)
Virtuelle Arbeit: $\overline{W} = F \cdot \overline{s}$ $bzw.$ $\overline{W} = M \cdot \overline{\varphi}$	Virtuelle Arbeit: $\overline{W} = \overline{F} \cdot s$ $bzw.$ $\overline{W} = \overline{M} \cdot \varphi$
Mit Hilfe des PvV können gezielt **einzelne Kraftgrößen** (Auflagerreaktionen und Schnittgrößen) mit Hilfe einer Arbeitsgleichung bestimmt werden.	Mit Hilfe des PvK können gezielt **einzelne Weggrößen** (Knotenverschiebungen oder -verdrehungen) mit Hilfe einer Arbeitsgleichung bestimmt werden.
PvV bedeutet: Das System erfüllt das **Gleichgewicht**, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten gleich null ist. Dabei muss die virtuelle Verrückung eine infinitesimal kleine und gedachte, **mit den geometrischen Bindungen des Systems verträgliche**, sonst beliebige Verrückung sein.	PvK bedeutet: Das System erfüllt eine **Verformungsbedingung**, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten gleich null ist. Dazu muss eine virtuelle Kraft (als infinitesimal kleine und gedachte Kraft) **am Ort der gesuchten Verformungsgröße** aufgebracht werden.
Besonderheit: Durch die Lagrange'sche Befreiung wird ein statisch bestimmtes System zu einem verschieblichen, aus starren Scheiben bestehendem System. Es gibt nur **äußere** virtuelle Arbeiten geleistet. $\Sigma\overline{W} = \Sigma\overline{W}_a + \overset{0}{\cancel{\Sigma\overline{W}_i}} = \Sigma\overline{W}_a = 0$	**Besonderheit:** Durch das Aufbringen einer virtuellen Last entstehen virtuelle Schnittgrößen. Diese leisten auf den Verzerrungen des realen Beanspruchungszustandes innere virtuelle Arbeiten. Beim PvK entstehen **innere** und **äußere** Arbeiten. Es gilt: $\Sigma\overline{W} = \Sigma\overline{W}_a + \Sigma\overline{W}_i = 0$

Hinweis: Äußere Arbeiten sind Arbeiten, die durch von außen auf das System einwirkende Kraftgrößen auf (sichtbaren und) messbaren Verformungsgrößen geleistet werden.

Innere Arbeiten werden im Inneren des Stabes geleistet. So leistet die Normalkraft N auf der Dehnung der Stabachse Arbeiten. Gleiches macht das Biegemoment auf der Krümmung der Stabachse.

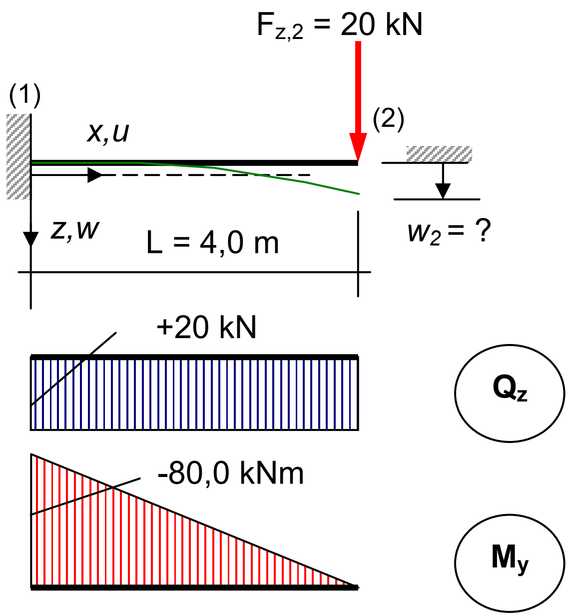
Dehnungen, Krümmungen, Schubverzerrungen u.a. werden unter dem Begriff „Verzerrungen" zusammengefasst. Verzerrungen sind die Verformungen des infinitesimalen Stababschnittes und als solche nicht sichtbare und nicht direkt messbare Rechengrößen.

Mit dem PvK können Verformungen (Knotenverschiebungen und –verdrehungen; Relativverschiebungen und v.a. mehr) berechnet werden. Die **Verformungen eines Tragwerks** müssen ermittelt werden, um

- dessen **Gebrauchstauglichkeit** nachzuweisen (Stichwörter: Lichtraumprofil, Wasserablauf, Kranbahnen, Lagerbemessung);
- der **Einfluss der Verformungen** auf die Schnittgrößen und damit auf die Tragfähigkeit des Tragwerks zu erfassen (Stichwörter: stabilitätsgefährdete Stützen; Berechnung nach Theorie II. Ordnung);
- noch fehlende Gleichungen (sogenannte **Verformungsbedingungen**) bei **statisch unbestimmten Systemen** zu erhalten (entscheidende Parameter hierfür sind die Biegesteifigkeit E · I [kNm²] und die Dehnsteifigkeit E · A [kN] des Stabquerschnittes).

Zur Herleitung und zum Verständnis folgendes Beispiel:

Gegeben ist ein 4 m langer Kragarmträger, der am Ende eine vertikale Last von 20 kN aufzunehmen hat. Zu erwarten ist, dass sich das System durchbiegt. Zu klären ist, um wie viel Zentimeter sich das Kragarmende in vertikaler Richtung verschiebt. Der Material besitzt einen E-Modul von E = 20000 kN/cm². Das Trägheitsmoment des Trägerprofils ist I_y = 3000 cm^4.



Eine reale Last erzeugt reale Spannungen, die – über die Querschnittsfläche aufintegriert – zu realen Schnittgrößen zusammengefasst werden. Reale Spannungen stellen sich bei realen Dehnungen ein. Betrachtet man einen beliebigen Schnitt an der Stelle x (0 ≤ x ≤ 4,0 m),

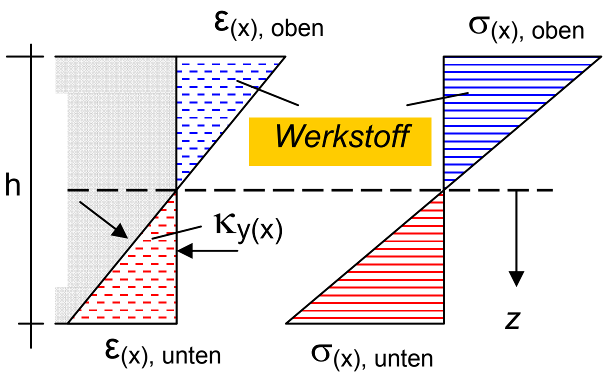
Hinweis: Statisch unbestimmte Systeme werden wir in STA2 nicht behandeln. Wenn Sie dieses Kapitel „verinnerlicht" haben, dann hätten Sie auch das Werkzeug für die Berechnung statisch unbestimmter Systeme in der Hand.

Nur: Diese Rechnung ist sehr zeitaufwendig. Deshalb werden heute keine statisch unbestimmten Systeme mehr mit der Hand berechnet, sondern mit Statikprogrammen wie z.B. „Ruckzuck" oder „RStab".

Wer sich trotzdem mit diesem Thema beschäftigen möchte, schaut bitte in der Literatur unter dem Stichwort „Kraftgrößenverfahren" nach.

so ist der nebenstehende Spannungs- und Dehnungszustand vorzufinden. Der Zusammenhang zwischen Spannungsverteilung und dem Biegemoment ist durch die bekannte Formel

$$\sigma_{(x)} = \overset{\text{hier null}}{\cancel{\frac{N_{(x)}}{A}}} + \frac{M_{y(x)}}{I_y} \cdot z$$



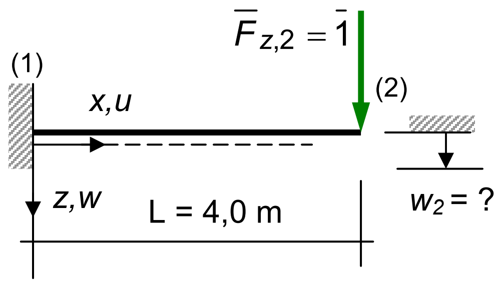
gegeben. Beim einem linear-elastisches Materialverhalten (Hooke'sches Gesetz) sind Spannungsverteilung und Dehnungsverteilung linear über die Querschnittshöhe *h* verteilt. Die Veränderung der Dehnung über die Querschnittshöhe (die Steigung des Dehnungsverlaufes) wird mit κ_y (= Krümmung) bezeichnet. Es lässt sich folgender Zusammenhang herstellen:

$$\kappa_{y(x)} = \frac{\varepsilon_{(x),unten} - \varepsilon_{(x),oben}}{h} = \frac{\sigma_{(x),unten} - \sigma_{(x),oben}}{E \cdot h}$$

$$\kappa_{y(x)} = \frac{M_{y(x)} \cdot z_{unten} - M_{y(x)} \cdot z_{unten}}{E \cdot I_y \cdot h} = \frac{M_{y(x)}}{E \cdot I_y} \cdot \overset{=1}{\cancel{\frac{z_{unten} - z_{oben}}{h}}}$$

Die Umformung ergibt den bekannten Zusammenhang, dass die Krümmung proportional zum Biegemoment ist. Der Proportionalitätsfaktor ist durch den Kehrwert der **Biegesteifigkeit** $E\,I_y$ gegeben.

<u>Zurück zum Beispiel:</u> Stellen wir uns jetzt bitte vor, man hätte **v o r** dem Aufbringen der realen Last $F_{z,2}$ eine virtuelle Einzellast $\overline{F}_{z,2} = \overline{1}$ am Ort und in Richtung der gesuchten Verschiebung aufgebracht. Dann würde die virtuelle Einzellast beim Aufbringen der realen Last eine virtuelle Verschiebungsarbeit auf dem realen Weg w_2 leisten. Aus simplen mathematischen Gründen wird der virtuellen Last die Größe „1“ zugeordnet.



Hinweis: Bitte blättern Sie zurück zu den Skripten des Moduls STA1. Die Krümmung ist die „Verdrehung“ des infinitesimalen Stabanschnittes. Die Krümmung lässt sich durch zweimalige Ableitung nach der Stabkoordinate x aus der Biegelinie $w_{(x)}$ bestimmen.

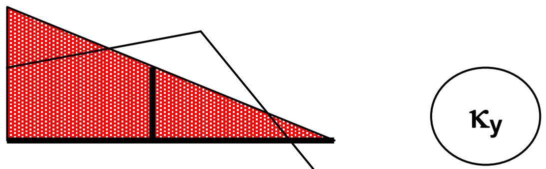
$$\boxed{w''_{(x)} = -\varphi'_{(x)} = -\kappa_{y(x)}}$$

$$\boxed{\kappa_{y(x)} = \frac{M_{y(x)}}{E \cdot I_y}}$$

Diese virtuelle Arbeit wird als **äußere virtuelle Verschiebungsarbeit** bezeichnet, weil sie von einer von außen angreifenden virtuellen Kraft auf einem realen Weg geleistet wird, der von einer anderen (realen) Kraft verursacht wird.

Neben der äußeren virtuellen Verschiebungsarbeit wird auch noch **innere virtuelle Verschiebungsarbeit** geleistet... warum? ... weil,

1) Auf Seite 7-17 wurde gezeigt, dass die reale Last eine reale Krümmung in <u>Inneren</u> des Stabes erzeugt und sich – affin zum M_y-Verlauf – linear veränderlich entlang der Stabachse verteilt (vgl. Grafik)

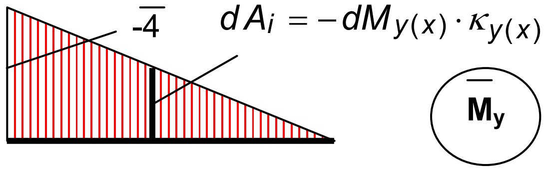


$$\kappa_{y(x=0)} = \frac{M_{y(x=0)}}{E \cdot I_y}$$

$$= \frac{-80{,}0}{20000 \cdot 3000 \cdot 10^{-4}} = -0{,}01\overline{3}3\ m^{-1}$$

2) Die virtuelle Kraft erzeugt einen virtuellen Zustand, also beispielsweise eine virtuellen Momentenverlauf.

3) Im Inneren des Stabes kann jetzt die virtuelle Schnittgröße auf dem zugehörigen Weg – beim Biegemoment ist es die reale Krümmung - innere virtuelle Verschiebungsarbeit leisten.



$$d\overline{A}_i = -\overline{dM}_{y(x)} \cdot \kappa_{y(x)}$$

4) Um die innere Verschiebungsarbeit zahlenmäßig erfassen zu können, müssen mit Hilfe eines **Integrals** über die Stablänge alle Arbeitsanteile, die in jedem der einzelnen infinitesimalen Stababschnitte geleistet werden, aufsummiert werden.

$$\Sigma\overline{A}_i = -\int_{x=0}^{x=L=4} \overline{M}_{y(x)} \cdot \kappa_{y(x)}\, dx$$

Nach dem Energieerhaltungsgesetz muss die Summe aller Arbeiten gleich null sein. Da es äußere und innere (virtuelle) Arbeiten gibt, gilt also:

$$\Sigma\overline{A}_a + \Sigma\overline{A}_i = 0$$

Die **innere Arbeit** ist dabei **negativ**, weil sie der im Bauteil gespeicherten Energie entspricht, die durch die äußere Verschiebungsarbeit der virtuellen Last in das System eingetragen wird.

Hinweis: Der Begriff „innere Arbeit“ ist eine sprachliche Vereinfachung. Man versteht darunter die Arbeit, die von den inneren Kraftgrößen geleistet wird. Durch Verwendung des Schnittprinzips haben wir die inneren Beanspruchungen (= Spannungszustand) durch Schnittgrößen „sichtbar“ gemacht. Schnittgrößen sind Spannungsresultierende bezüglich der Stabachse. Letztlich ist die innere Arbeit nichts anderes als das Produkt „Spannung mal Dehnung“, aufintegriert über alle Querschnittspunkte und Orte entlang der Stabachse.

Wird die Arbeitsgleichung nach der äußeren Arbeit aufgelöst, entsteht:

$$\Sigma\overline{A}_a = -\Sigma\overline{A}_i \quad \rightarrow \quad \overline{1}\cdot w_2 = \int_{x=0}^{x=L=4} \overline{M}_{y(x)} \cdot \kappa_{y(x)}\, dx$$

Die unbekannte Weggröße (hier also w_2) kann wegen der Rechenvereinfachung „virtuelle Kraft = 1“ direkt aus der Auswertung des Integrals gewonnen werden.

Zu unserem Beispiel: Der Funktionsverlauf der virtuellen Momentenlinie ist durch

$$\overline{M}_{y(x)} = -4 + x$$

gegeben, der wirkliche Verlauf der Krümmung (vgl. S. 7-18) durch

$$\kappa_{y(x)} = -\frac{80,0}{6000} + \frac{20}{6000}\cdot x = -0,01\overline{3} + 0,00\overline{3}\cdot x$$

Eingesetzt in die obige Arbeitsgleichung ergibt sich das gesuchte Ergebnis für w_2:

$$w_2 = \int_{x=0}^{x=4} (-4+x)\cdot\left(-0,01\overline{3} + 0,00\overline{3}\cdot x\right) dx = \int_{x=0}^{x=4} \left(0,05\overline{3} - 0,02\overline{6}\cdot x + 0,00\overline{3}\cdot x^2\right) dx$$

$$= 0,05\overline{3}\cdot x - 0,01\overline{3}\cdot x^2 + 0,00\overline{1}\cdot x^3 \Big|_0^4 \quad = 0,05\overline{3}\cdot 4 - 0,01\overline{3}\cdot 4^2 + 0,00\overline{1}\cdot 4^3 - 0 = \underline{0,0711m}$$

Die Lösung also: Ein 4,0 m langer Kragarm mit einer konstanten Biegesteifigkeit von 6000 kNm² wird sich unter einer Last von 20 kN am Kragarmende hier eine vertikale Verschiebung um 7,11 cm nach unten aufweisen.

Im obigen Beispiel ist die Biegesteifigkeit zwischen Knoten 1 und 2 konstant. Damit kann die Arbeitsgleichung umgeformt werden:

$$\overline{1}\cdot w_2 = \int_{x=0}^{x=L=4} \overline{M}_{y(x)}\cdot\kappa_{y(x)}\, dx = \int_{x=0}^{x=L=4} \overline{M}_{y(x)}\cdot\frac{M_{y(x)}}{EI_y}\, dx = \frac{1}{EI_y}\cdot\int_{x=0}^{x=L=4} \overline{M}_{y(x)}\cdot M_{y(x)}\, dx$$

Hinweis: Die Auswertung des bestimmten Integrals ist sehr mühselig; speziell dann, wenn die Funktionsverläufe quadratisch oder sogar parabolisch sind.

Keine Angst: Wir machen diese Auswertung einmal per Hand; später dann mit Hilfe der sogenannten **Integraltafeln**.

Hinweis: Durch die Division der Arbeitsgleichung mit der virtuellen Einheitsgröße wird die virtuelle „Eigenschaft“ heraus gekürzt.

Durch das Vorziehen des konstanten Kehrwertes der Biegesteifigkeit vor das Integral, bleiben hinter dem Integralzeichen die Funktionsverläufe der virtuellen Momentenlinie (infolge virtueller Einheitslast) und der Momentenverlauf der wirklichen Lasteinwirkung stehen. Man spricht beim Auswerten des Integrals dann **fälschlicherweise** vom „**Überlagern der Momentenlinien**" (dazu später mehr).

Setzt sich ein Tragwerk aus n Stababschnitten mit unterschiedlichen Biegesteifigkeiten zusammen, so ist die Auswertung des Integrals abschnittsweise durchzuführen.

$$\bar{1}\cdot\delta=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{EI_{y,i}}\cdot\int_{x_i=0}^{x_i=L_i}\overline{M}_{y(x)}\cdot M_{y(x)}\,dx\right)$$

Erweiterung der Arbeitsgleichung:

Bei der Bearbeitung des Kragarm-Beispiels auf S. 7.17 wurden nur die Biegemomente und die Biegesteifigkeit näher betrachtet. Beim Kragarm tritt jedoch neben der Biegebeanspruchung auch eine Schubkraftbeanspruchung hinzu. Die reale Last wird Schubverzerrungen erzeugen, auf denen die virtuelle Querkraft (infolge der virtuellen Einheitslast) zusätzlich innere Verschiebungsarbeit leisten wird.

Was ist mit der Normalkraft? Bei rahmenartigen Systemen oder Fachwerkträgern gibt es auch bzw. ausschließlich Längskraftbeanspruchungen. Was passiert, wenn Temperaturen das System dehnen oder verkrümmen? Leisten die virtuellen inneren Kraftgrößen hier denn keine Arbeit? Wenn sich ein Auflager sich verschiebt oder verdreht, so entstehen im System Verformungen. Wie werden diese berücksichtigt?

Antwort: Wenn eine gesuchte Weggröße exakt berechnet werden soll, so müssen alle Arbeitsanteile berücksichtigt werden. Die **erweiterte Arbeitsgleichung** lautet::

$$\bar{1}\cdot\delta=\int_{System}\left\{\begin{array}{l}\overline{M}_{y(x)}\cdot\kappa_{y(x)}+\overline{M}_{z(x)}\cdot\kappa_{z(x)}+\overline{N}_{(x)}\cdot\varepsilon_{0(x)}\\+\overline{V}_{z(x)}\cdot\gamma_{z(x)}+\overline{V}_{y(x)}\cdot\gamma_{y(x)}+\overline{M}_{T(x)}\cdot\vartheta_x\\+\overline{N}_{(x)}\cdot\alpha_T\cdot T_0+\overline{M}_{y(x)}\cdot\frac{\alpha_T\cdot\Delta t}{h}+\overline{M}_{z(x)}\cdot\frac{\alpha_T\cdot\Delta t}{b}\end{array}\right\}dx$$

$$+\Sigma\left(\overline{F}\cdot s_{Feder}\right)+\Sigma\left(\overline{M}\cdot\varphi_{Feder}\right)-\Sigma\left(\overline{A}\cdot s_{Aufl}\right)-\Sigma\left(\overline{M}^{E}\cdot\varphi_{Aufl}\right)$$

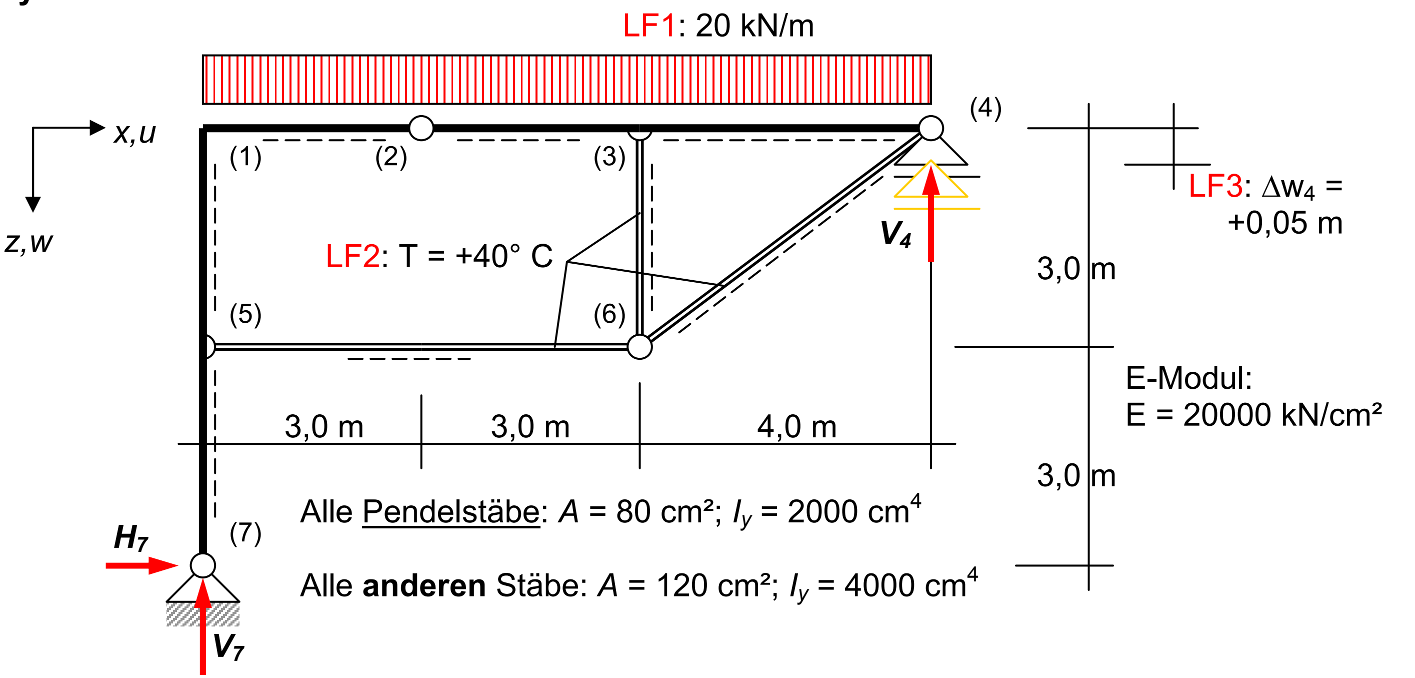
Hinweis: Eine gesuchte Weggröße wird allgemein mit δ (=delta) gekennzeichnet. Hierbei kann es sich um eine Verschiebung, eine Verdrehung oder auch um besondere Weggrößen handeln, wie eine Relativverdrehung zweier Tangenten, Abstandsänderung zweier Systempunkte oder die Drehung einer Sehne sein.

Hilfe: Die erweitere und somit vollständige Arbeitsgleichung enthält alle möglichen Arbeitsanteile, die bei einem räumlichen Stabwerk auftreten können. Beim ebenen System fallen Querbiegung (M_z und V_y) sowie Torsion M_T weg. Gibt es nur starre und unverschiebliche Lager (ohne Federn und ohne Auflagerverschiebungen oder –verdrehungen), so kann die „untere Zeile" komplett gestrichen werden.
Weitere Erläuterungen folgen!

7.5 Berechnung einzelner Weggrößen mit Hilfe des PvK

Neues Rechenbeispiel: Für das nachfolgend skizzierte System sollen mehrere Lastfälle untersucht und unterschiedliche Einzelverformungen berechnet werden. Dabei soll auch gezeigt werden, wie man das Arbeitsintegral mit Hilfe von **Integraltafeln** schneller und i.d.R. auch fehlerfreier auswerten kann.

System:



Auflagerreaktionen: Da H_7 die einzige H-Kraft ist, ergibt sie sich zwangsläufig zu null. Unter der Wirkung von LF1 bis LF3 führt nur LF1 zu Schnittgrößen und Auflagerreaktionen ungleich null. Das System ist statisch bestimmt, so dass die Auflagerverschiebung und die Längenänderung der Pendelstäbe aufgrund der Temperatureinwirkung zwängungsfrei aufgenommen werden können.

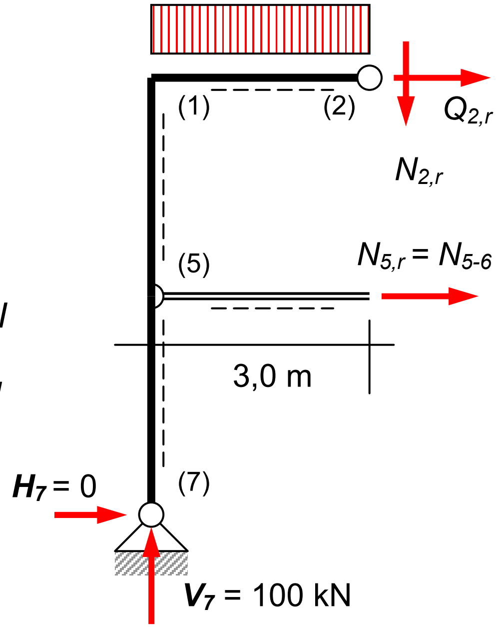
Aus Anschauung: $V_7 = V_4 = 10 \cdot 20 / 2 = 100\ kN$

Hinweis: Es handelt sich um ein gemischtes System. Es enthält Pendelstäne, die nur Normalkräfte aufnehmen können. Bei einem vertikalen Schnitt durch Knoten 2 und die gesamte Konstruktion, bleibt die Stabkraft $N_{5\text{-}6}$ als einzige Unbekannte übrig. Sie kann mit der Gelenkbedingung $\Sigma M_{2,\,TS} = 0$ berechnet werden (vgl. Kap. 6.6).

Schnittgrößen: Zunächst die Stabkraft im Stab 5-6:

$$\Sigma \overleftarrow{M}_{2,RTS} = 0: \quad -V_4 \cdot 3 + N_{2,r} \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$\rightarrow N_{2,r} = +70\,kN$$



Mit Hilfe des Rundschnittverfahrens um Knoten 6 können die übrigen Stabkräfte der anderen Pendelstäbe bestimmt werden.

$$\Sigma \overrightarrow{H} = 0: \quad -N_{56} + N_{64} \cdot \cos(36{,}87°) = 0 \quad \rightarrow N_{64} = +87{,}5\,kN$$

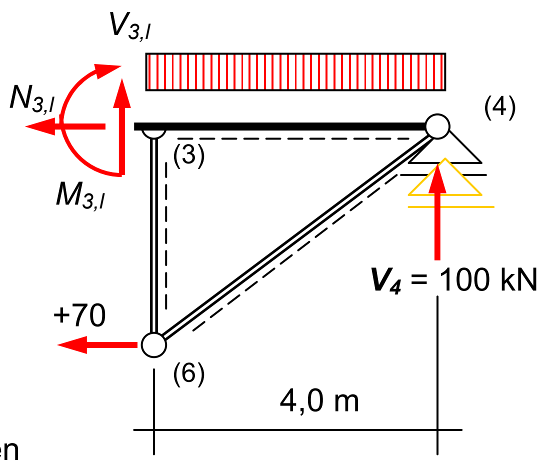
$$\downarrow \Sigma V = 0: \quad -N_{63} - N_{64} \cdot \sin(36{,}87°) = 0 \quad \rightarrow N_{63} = -52{,}5\,kN$$

Der Pendelstab 6-3 bildet quasi ein Auflager für den oberen Riegel mit einer „Auflagerreaktion“ von 52,5 kN.

Der Schnitt links neben Noten 3 führt auf weitere Schnittgrößen, die als „Stützstellen“ für den weiteren Verlauf wichtig sind.

$$\Sigma \overleftarrow{M}_3 = 0: \quad -M_{3,l} - 70 \cdot 3 + 100 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow M_{3,l} = +30\,kNm$$



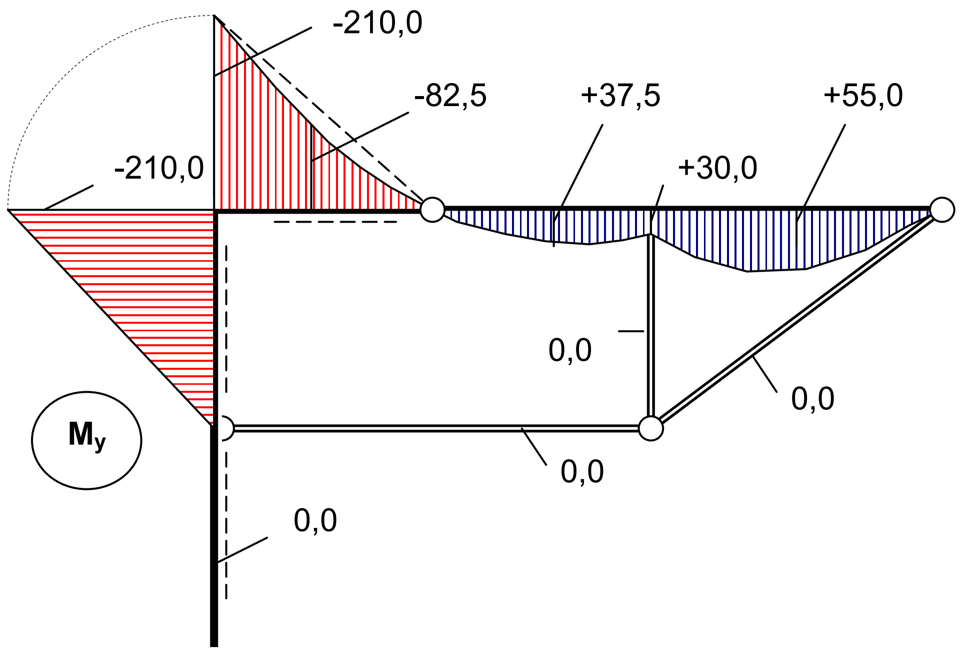
$$\Sigma H = 0: \quad \rightarrow N_{3,l} = -70\,kN$$

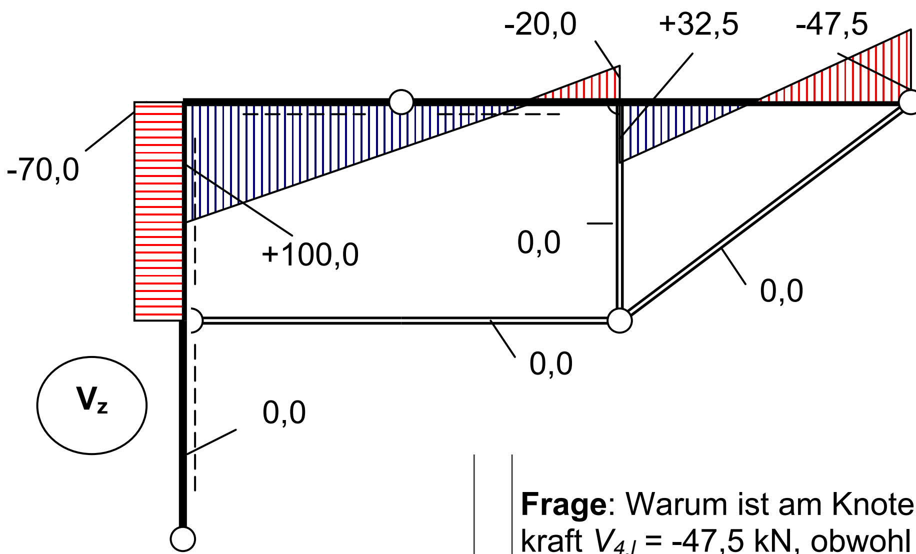
$$\Sigma V = 0: \quad \rightarrow Q_{3,l} = -20\,kN$$

Ohne weitere Schnitte und Gleichgewichtsbetrachtungen können die Schnittgrößenverläufe jetzt entwickelt werden (Hinweise rechts beachten). Wegen der Streckenlast wird sich in den horizontalen Stäben zwischen Knoten 1 und 4 ein linear veränderlicher V-Verlauf und ein parabolischer M-Verlauf einstellen. Da in den Stababschnitten keine stab-parallelen Lasten angreifen, wird der N-Verlauf sich aus konstanten „Abschnitten“ zusammensetzen.

Hinweis: Wenn H_7 = 0 ist, so kann im Stiel zwischen Knoten 7 und 5 keine Querkraft und somit auch kein Biegemoment vorhanden sein.

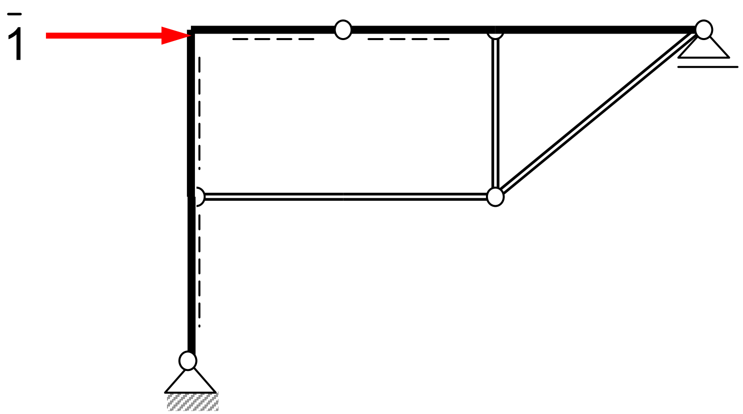
Wenn in Knoten 5 eine Kraft mit 70 kN nach rechts zieht, so entsteht im Knoten 1 ein Biegemoment von -210 kNm.

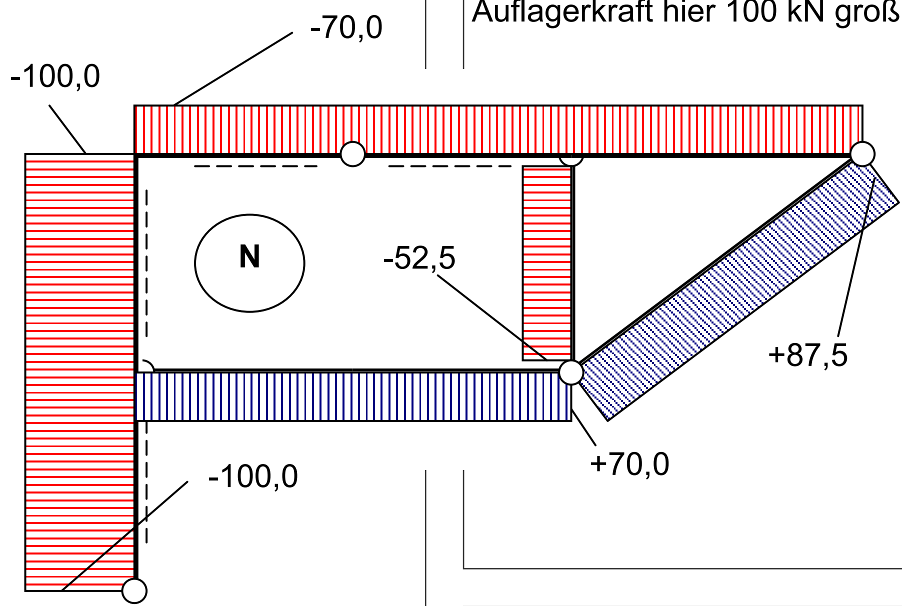




Frage: Warum ist am Knoten 4 die Querkraft $V_{4,l}$ = -47,5 kN, obwohl doch die Auflagerkraft hier 100 kN groß ist?

<u>Verformungsberechnung:</u> Es soll die horizontale Verschiebung im Knoten 1 ermittelt werden (u_1 = ?). Um diesen Wert zu finden, bringen wie eine virtuelle Einheitskraft in horizontaler Richtung im Knoten 1 auf (**Vorstellung**: Messfühler, Wegmesser in x-Richtung).





Die virtuelle Last erzeugt virtuelle Auflagerkräfte und virtuelle Schnittgrößen. Virtuelle Arbeit wird geleistet

1. von der virtuellen Einheitskraft auf dem realen Weg u_1 (die gesuchte Weggröße!),
2. von den virtuellen Auflagerkräften auf dem realen Weg (Beachte: Δw_4 = 0,05 m),
3. von den virtuellen Normalkräften auf der realen Stabdehnung ($\varepsilon = N / EA$),
4. von den virtuellen Normalkräften auf der realen Stabdehnung infolge gleichmäßiger Temperaturänderung (vgl. Lastfall 2) und
5. von den virtuellen Momenten auf den realen Krümmungen ($\kappa_y = M / EI_y$)
6. sowie von den virtuellen Querkräften auf den realen Schubverzerrungen,.

Also müssen nun die virtuellen Auflagerreaktionen, der virtuelle N-Verlauf und der virtuelle M_y-Verlauf ermittelt werden.

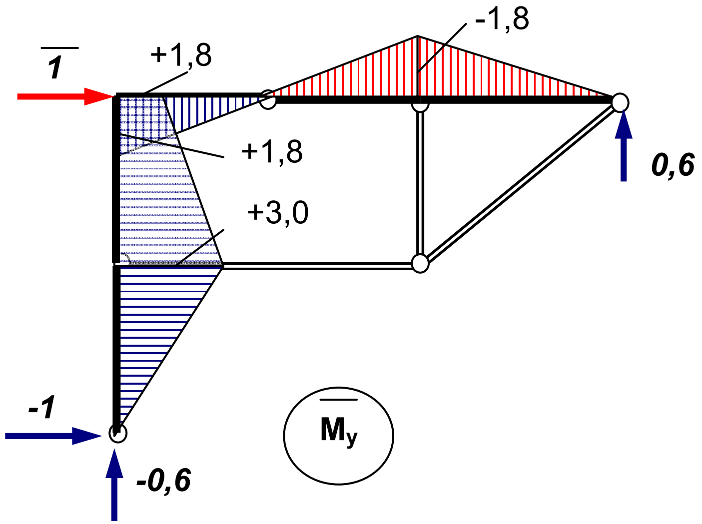
$$\Sigma \overleftarrow{\overline{M}}_7 = 0: \quad +\overline{V}_4 \cdot 10 - \overline{1} \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow \overline{V}_4 = +0{,}6$$

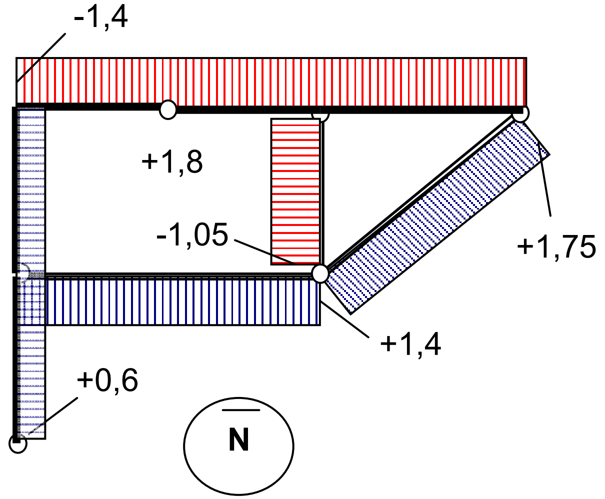
$$\Sigma H = 0: \quad \rightarrow \overline{H}_7 = -1{,}0 \qquad \Sigma V = 0: \quad \rightarrow \overline{V}_7 = -0{,}6$$

Virtuelle Schnittgrößen: Zunächst die Stabkraft im Stab 5-6:

$$\Sigma \overleftarrow{\overline{M}}_{2,LTS} = 0: \quad -\overline{V}_7 \cdot 3 + N_{2,r} \cdot 3 + \overline{H}_7 \cdot 6 = 0 \qquad \rightarrow \overline{N}_{2,r} = +1{,}4$$

Die virtuellen Schnittgrößenverläufe (für M und N) können jetzt ohne weitere Schnitte und Gleichgewichtsbetrachtungen entwickelt werden:



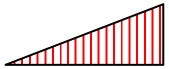
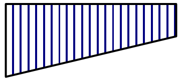
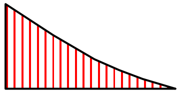
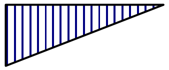
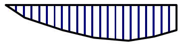
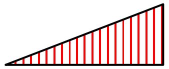
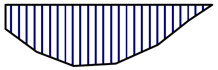
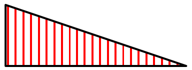
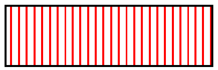
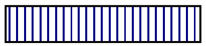


Hinweis: Die unter 1. genannte virtuelle Arbeit ist eine äußere virtuelle Verschiebungsarbeit. Die unter 2. bis 6. genannten Arbeiten sind innere virtuelle Arbeiten, die sich im Inneren der Stäbe abspielen. Die unter 6. aufgeführte Arbeit wird meist vernachlässigt, da diese nur einen geringen Anteil an der Gesamtverformung, in diesem Fall also u_1, aufweist.

Hinweis: Bitte die Systemskizze auf Seite 7-21 beachten. Die positive Definition der virtuellen Auflagereaktionen werden in gleicher Weise übernommen.

Aufgabe: Ermitteln Sie den virtuellen Querkraftverlauf (nur zur Übung!).

Die Auswertung der Arbeitsgleichung soll aus Gründen der Übersichtlichkeit tabellarisch erfolgen. Die Referenzsteifigkeit wird auf ***EI$_c$* = 200000 kNm²** festgelegt.

Anteil/ Bereich	Steifigkeits-verhältnis	Stab-länge	**Wirklicher Zustand** Anfang .... Ende	**Virtueller Zustand** Anfang .... Ende	**Wert**
M/5-1	25,0	3,0	 $25{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-210{,}0) \cdot \left(\overline{3{,}0} + 2 \cdot \overline{1{,}8}\right) \cdot 3{,}0$		-17325,0
M/1-2	25,0	3,0	 $25{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \overline{3{,}0} \cdot \left[-210{,}0 + 2 \cdot (-82{,}5)\right] \cdot 3{,}0$		-14062,5
M/2-3	25,0	3,0	 $25{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(-\overline{1{,}8}\right) \cdot \left[2 \cdot 37{,}5 + 30{,}0\right] \cdot 3{,}0$		-2362,5
M/3-4	25,0	4,0	 $25{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(-\overline{1{,}8}\right) \cdot \left[30{,}0 + 2 \cdot 55{,}0\right] \cdot 4{,}0$		-4200,0
N/5-1	0,1875	6,0	 $0{,}1875 \cdot \frac{1}{1} \cdot (-100{,}0) \cdot \overline{0{,}6} \cdot 6{,}0$		-67,5
N/1-4	0,1875	10,0	$0{,}1875 \cdot \frac{1}{1} \cdot (-70{,}0) \cdot \left(-\overline{1{,}4}\right) \cdot 10{,}0$		183,8

Hinweis: In einer der Lehrveranstaltungen haben Sie ein Formblatt bekommen, dass Ihnen die tabellarische Auswertung der Arbeitsgleichung erleichtert. Die Berechnung der einzelnen Arbeitsintegrale

$$\int_G \overline{M} \cdot \frac{M}{E \cdot I} dx \quad bzw. \quad \int_G \overline{N} \cdot \frac{N}{E \cdot A} dx$$

erfolgt mit Hilfe von Integraltafeln. Diese sind in den üblichen Bautabellenbüchern zu finden.

Hinweis: Die Steifigkeitsverhältnisse ergeben sich bei Biegeanteilen zu

$$\frac{E \cdot I_c}{E \cdot I} ,$$

bei Normalkraftanteilen zu

$$\frac{E \cdot I_c}{E \cdot A} .$$

Bei Temperaturanteilen und äußeren Arbeitsanteilen wird alles mit EI_c multipliziert. Die am rechten Tabellenrand errechneten Werte sind ***EI$_c$*-fache** Verformungsanteile.

N/5-6	0,1250	6,0	$0{,}125 \cdot \frac{1}{1} \cdot 70{,}0 \cdot \overline{1{,}4} \cdot 6{,}0$	+73,5
N/6-3	0,1250	3,0	$0{,}125 \cdot \frac{1}{1} \cdot (-52{,}5) \cdot \left(-\overline{1{,}05}\right) \cdot 3{,}0$	+20,7
N/6-4	0,1250	5,0	$0{,}125 \cdot \frac{1}{1} \cdot 87{,}5 \cdot \overline{1{,}75} \cdot 5{,}0$	+95,7
T/5-6	200000,0	6,0	$\varepsilon_T = \alpha_T \cdot T = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 40° = +4{,}8 \cdot 10^{-4}$ $200000 \cdot \frac{1}{1} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \overline{1{,}4} \cdot 6{,}0$	+806,4
T/6-3	200000,0	3,0	$200000 \cdot \frac{1}{1} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \left(-\overline{1{,}05}\right) \cdot 3{,}0$	-302,4
T/6-4	200000,0	5,0	$200000 \cdot \frac{1}{1} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \overline{1{,}75} \cdot 5{,}0$	+840,0
Δw / 4	200000,0	---	Äußere Arbeit: -1 <u>und</u> negative Arbeit (*V_4* und Δw entgegengesetzt): $-\left(EI_c \cdot \overline{V}_4 \cdot \Delta w_4\right) = -\left(-200000 \cdot \overline{0{,}6} \cdot 0{,}05\right)$	+6000,0
Summe:			$\delta' = EI_c \cdot \delta =$	**- 30299,8**

Die horizontale Verformung der Knoten 1 ergibt sich aus:

$$\delta \equiv u_1 = \frac{\delta'}{EI_c} = \frac{-30299{,}8}{200000} = \underline{-0{,}152\,m}$$

Der Knoten 1 schiebt sich also unter der Einwirkung von LF 1, 2 und 3 um 15,2 cm nach links. Die virtuelle Einheitslast wurde als Kraft mit Wirkungsrichtung nach rechts angesetzt. Ein negatives Ergebnis ist also eine Verschiebung nach links.

Hinweis: Man darf nur dann über die Knotenpunkte „hinweg integrieren", wenn die Steifigkeiten gleich sind. Für die Stäbe zwischen dem Knoten 1 und 4 sind die Normalkraft <u>**und**</u> die Dehnsteifigkeiten *EA* gleich groß (deshalb alles in einem Rutsch möglich!)

Hinweis: In den drei Pendelstäben wirkt eine Temperaturerhöhung von 40° C. Die gleichmäßige Erwärmung führt zu einer positiven Längsdehnung. Die virtuelle Normalkraft leistet virtuelle innere Verschiebungsarbeit in den betroffenen Stäben.

$$\int_G \overline{N} \cdot \varepsilon_T \, dx$$

Aufgabe: Berechnen Sie das System mit „Ruckzuck" und prüfen Sie, ob hier alles richtig gerechnet wurde. Schwer genug war es ja (auch für den Ersteller dieses Dokumentes).

7.6 Anwendung, Berechnungshilfen, Kontrollen

Die Verformungsrechnung mit Hilfe des PvK stellt einen Schlüssel zur Lösung weiterer statischer Probleme dar. So ist es möglich, mit Hilfe des PvK **Verformungsbedingungen** zu formulieren, die zur Lösung eines statisch unbestimmten Systems erforderlich sind. Statisch unbestimmte Systeme können nicht mehr allein mit Hilfe der üblichen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

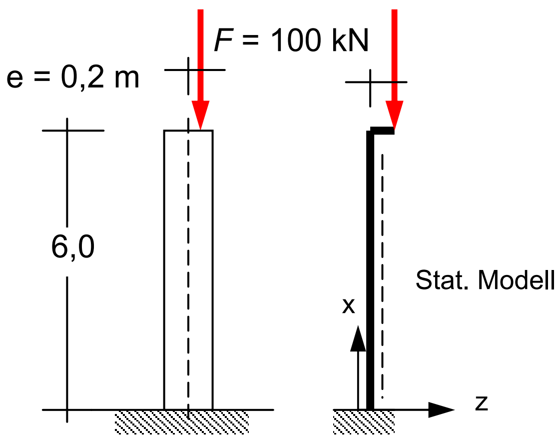
In diesem Kapitel soll jedoch ein anderes Thema angesprochen werden, und zwar: **Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung**. Bislang haben wir Schnittgrößen lediglich nach **Theorie I. Ordnung** berechnet; d.h. wir haben Schnittgrößen und Auflagerreaktionen auf der Basis von Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System ermittelt. Bei bestimmten Voraussetzungen führt die Verformung eines Systems dazu, dass die Schnittgrößen und Auflagerreaktionen im Hinblick auf die Bemessung der Querschnitte und die Tragsicherheit des gesamten Systeme ungünstiger werden. Somit ist es extrem wichtig, die Schnittgrößen am verformten System zu kennen, d.h. es müssen Schnittgrößen und Auflagerreaktionen auf der Basis von Gleichgewichtsbedingungen am verformten System ermittelt werden. Kurz um: es müssen Schnittgrößen nach **Theorie II Ordnung** berechnet werden, um sichere Tragwerke bauen zu können.

Der Einfluss der Theorie II. Ordnung wird i.d.R. dann wichtig, wenn es sich um schlanke (filigrane) Strukturen unter Druckbeanspruchungen handelt. Jeder kennt das Problem des **Knickens**, des plötzlichen seitlichen Ausweichens eines Stabes, wenn dieser auf Druck beansprucht wird.

Dazu ein einleitendes Beispiel:

Eine 6 m hohe Stütze wird exzentrisch mit 100 kN am Stützenkopf auf Druck beansprucht. Die Stütze hat einen Querschnitt mit A = 144 cm² und I_y = 2000 cm^4. Der E-Modul beträgt 20000 kN/cm².

Frage: Wie sehen die Schnittgrößen nach Th. II. O. aus? Welche Konsequenzen hat das?



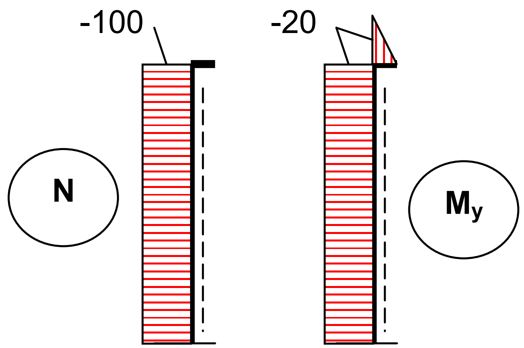
Hinweis: Wer einen Blick in das Kraftgrößenverfahren zu Berechnung statisch unbestimmter Systeme werfen möchte, dem empfehle ich folgendes Lehrbuch:

R. Dallmann: Baustatik 2 – Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2006.

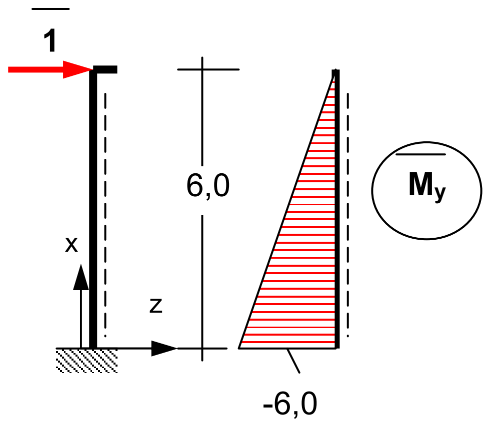
Hinweis: Weitere Stabilitätsprobleme sind „Kippen“ und „Beulen“. Aber auch das Problem des „Abschmierens“ einer „bemannten“ Leiter, die an eine Hauswand gelehnt wurde, ist ein ziemlich schmerzhaftes Stabilitätsproblem.

Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung:

Aufgrund der konstanten Exzentrizität wird der lotrechte Stab konstant mit -20 kNm auf Biegung beansprucht. Bei $EI_y = 20000 \cdot 2000 \cdot 10^{-4} = 4000$ kNm² ist eine konstante Krümmung mit -20 / 4000 = -0,005 [1/m] vorhanden, die zu einer seitlichen, nach rechts hin gerichteten Auslenkung der Stütze führt. Die Größe der Kopfauslenkung wird mit Hilfe des PvK ermittelt (pos. Verformung nach rechts):



$$\delta \equiv u_{Kopf} = \frac{1}{4000} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-20{,}0) \cdot \left(-\overline{6{,}0}\right) \cdot 6{,}0 = \underline{+0{,}090\,m}$$



Da der virtuelle N-Verlauf gleich null ist, gibt es keinen Anteil an der horizontalen Kopfauslenkung durch die Normalkraft.

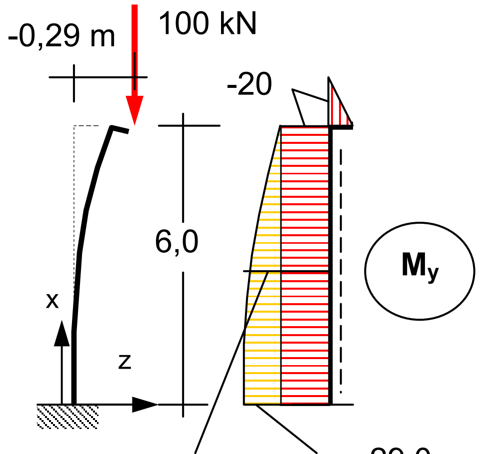
Das Einspannmoment am Stützenfuß kann bei dieser Verformung nicht mehr nur 20 kNm betragen. Aufgrund der Kopfauslenkung entsteht ein „verbogenes" System. Die Gesamtexzentrizität am Stützenfuß beträgt jetzt $e_{ges.}$ = 0,20 + 0,09 = 0,29 m.

1. Iteration:

Die Kopfauslenkung muss bei zunehmender Biegebeanspruchung größer als 9 cm ausfallen. Mit Hilfe des PvK errechnet sich korrigierend:

$$\delta \equiv u_{Kopf} = \frac{1}{4000} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left[2 \cdot (-26{,}75) + (-29{,}0)\right]\left(-\overline{6{,}0}\right) \cdot 6{,}0$$
$$= \underline{+0{,}12375\,m}$$

Die Gesamtexzentrizität am Stützenfuß beträgt jetzt $e_{ges.}$ = 0,20 + 0,12375 = 0,32375 m.



$$-(0{,}20 + 0{,}75 \cdot 0{,}09) \cdot 100 = -26{,}75\,kNm$$

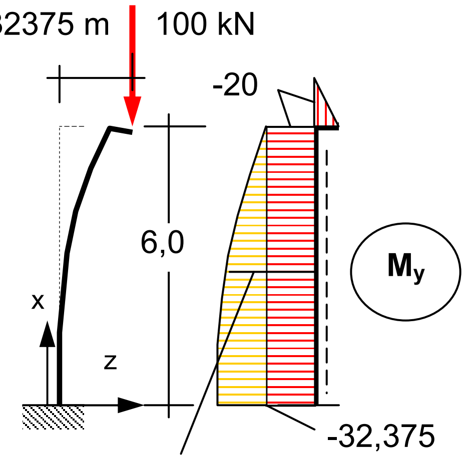
Hinweis: Eine Iteration ist eine fortlaufende Verbesserung eines Ergebnisses auf der Basis von Parametern der jeweils vorausgegangenen Iteration. Nähern sich die Iterationsergebnisse einem Grenzwert an, so spricht man von Konvergenz.

Hinweis: Die Biegelinie kann für die 1. Iteration noch exakt, für alle weiteren Iterationen näherungsweise mit einer quadratischen Parabel beschrieben werden (vgl. Auswertung des Arbeitsintegrals).

<u>2. Iteration</u>:

Die Kopfauslenkung wird bei weiter zunehmender Biegebeanspruchung größer als 12,375 cm ausfallen. Mit Hilfe des PvK errechnet sich weiter korrigierend:

$$\delta \equiv u_{Kopf} = \frac{1}{4000} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left[2 \cdot (-29{,}28) + (-32{,}375)\right]\left(-\overline{6{,}0}\right) \cdot 6{,}0$$
$$= \underline{+0{,}1364\, m}$$

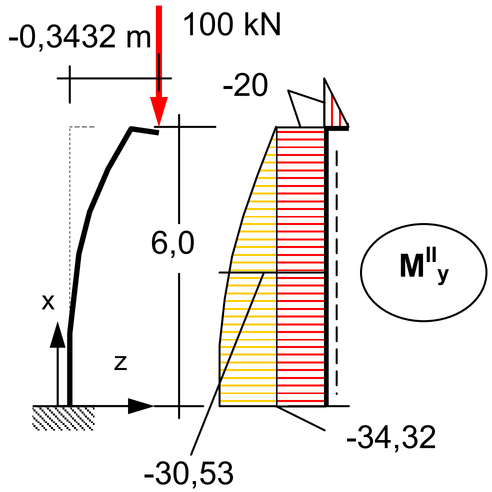


Die Gesamtexzentrizität am Stützenfuß beträgt jetzt
$e_{ges.}$ = 0,20 + 0,1364 = 0,3364 m.

$$-\left(0{,}20 + 0{,}75 \cdot 0{,}12375\right) \cdot 100 = -29{,}28\, kNm$$

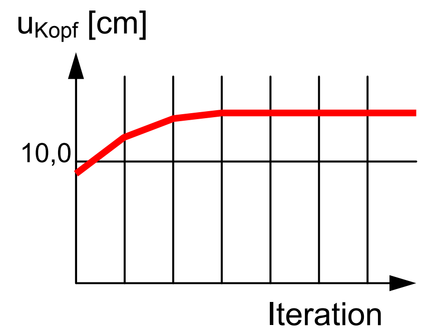
.... usw. .... usw.

Weitere Iterationen (eine 3. und ggf. 4. reicht dann irgendwann) führt schließlich auf das nebenstehende Ergebnis. Der M-Verlauf ist der **Biegemomentenverlauf nach Theorie II. Ordnung**.



<u>Konsequenzen:</u> Der Stützenquerschnitt hat am Stützenfuß ein Biegemoment aufzunehmen, das um das ca. 1,7-fache größer ist als das nach Theorie I. Ordnung. Die Bemessung der Stütze liefert somit ein völlig anderes Ergebnis (z.B. mehr Bewehrung, stärkeres Walzprofil, stärkere Schrauben zur Verankerung am Boden). Die größere Kopfauslenkung muss bautechnisch vertretbar sein. Die Gebrauchstauglichkeit muss gegeben sein. Auch das Fundament (bzw. die lastaufnehmende Konstruktion) muss größer ausgelegt werden, damit es unter der vergrößerten Exzentrizität nicht umkippt. Der Einfluss der Theorie II. Ordnung ist bei druckbeanspruchten Tragwerksteilen immer kritisch. In den Fachnormen sind dafür **besondere Nachweisverfahren** vorgeschrieben.

Hinweis: Die Iterationsergebnisse unseres Beispiels nähern sich einem Grenzwert an; sie konvergieren. Würden sie es nicht tun, so spricht man von Divergenz.



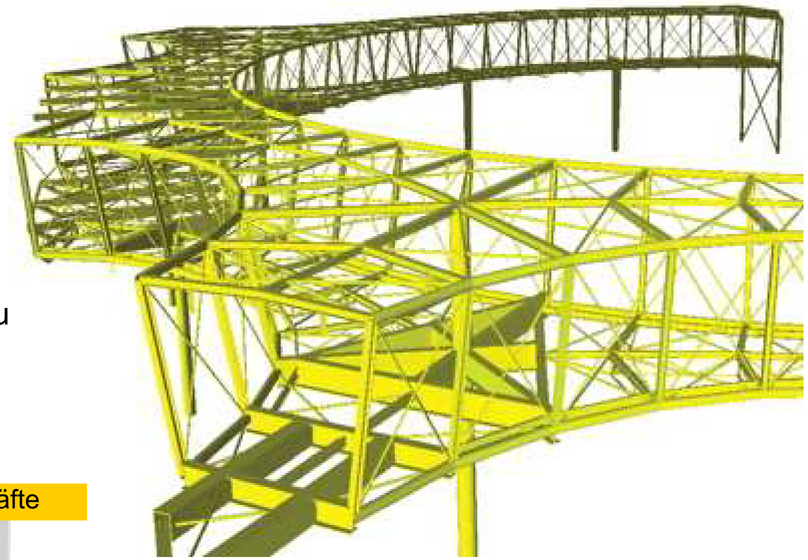
.

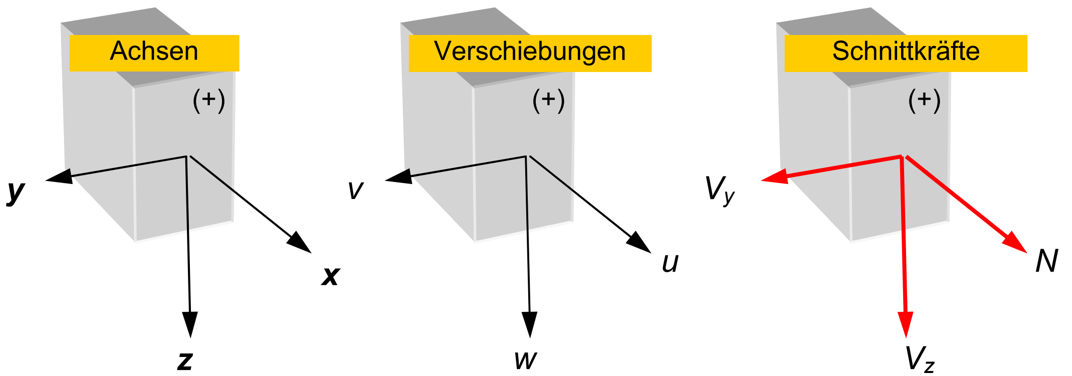
Aufgabe: Führen Sie die Berechnung ein weiteres Mal durch, wobei die Einzellast am Stützenkopf jetzt nach oben gerichtet ist. Wie macht sich eine Zugbeanspruchung in der Stütze im Hinblick auf die Theorie II. Ordnung bemerkbar? Vergrößert sich das Einspannmoment am Stützenfuß oder wird es sogar kleiner?

8. Torsion bei stabförmigen Bauteilen

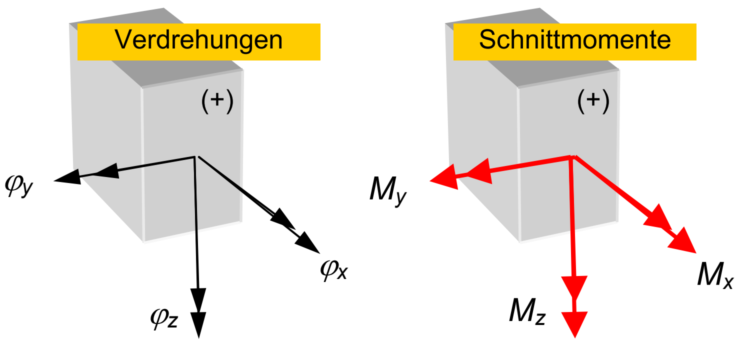
8.1 Einleitung

Die meisten Bauwerke sind räumliche Strukturen. Im Zuge der Tragwerksanalyse versucht man in der Regel, zumindest Teile davon als 2-D-Tragwerk zu modellieren, um möglichst einfache und klar strukturierte statische Systeme zu generieren. Dennoch gibt es immer wieder Bauwerke, die es aufgrund ihrer komplexen Struktur nicht zulassen, hierfür hinreichend zutreffende 2-D-Modelle (z.B. ebene Stabwerksmodelle) zu bilden. Ist man gezwungen, im Raum zu modellieren, so sind bei der statischen Berechnung **weitere Zustandsgrößen** zu berücksichtigen:





Zusätzlich zur Querbiegung (Biegung um die z-Achse inkl. zugehörige Querkraft in y-Richtung) entsteht als weitere Schnittgröße die **Torsion M_x (= M_T)**, die um die Längsachse des Stabes wirkend, diesen um seine Längsachse verdreht (tordiert). Es ergeben sich sechs Schnittgrößen und sechs Verformungsgrößen. Die Vorzeichendefinition aller Zustandsgrößen ergibt sich aus den nebenstehenden Abbildungen (pos. Schnittufer).



Hinweis: Hier sehen Sie ein Berechnungsmodell für eine Fußgängerbrücke in Brüssel.

Hinweis: Verdrehungen und Schnittmomente lassen sich nicht mehr mit Drehpfeilen, sondern nur noch mit Doppelpfeilen im Raum sinnvoll darstellen.

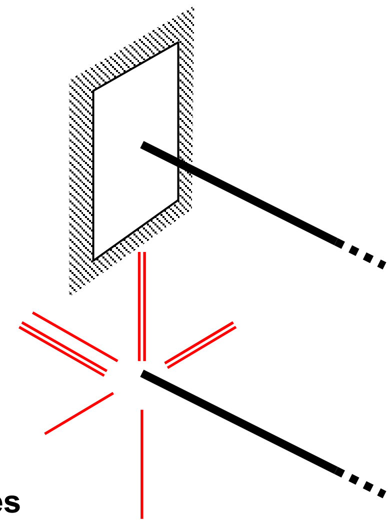
Damit ein räumlicher Körper (Gesamtsystem, Teilsystem, herausgeschnittener Knoten) im Gleichgewicht ist, sind insgesamt **sechs Gleichgewichtsbedingungen** zu erfüllen:

$$\Sigma K_x = 0; \quad \Sigma K_y = 0; \quad \Sigma K_z = 0;$$
$$\Sigma M_x = 0; \quad \Sigma M_y = 0; \quad \Sigma M_z = 0;$$

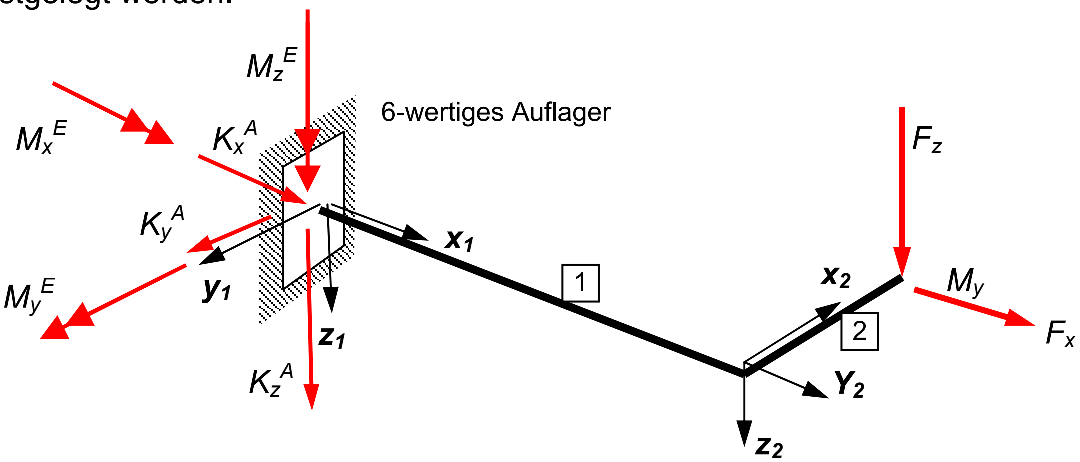
Die Auslagerausbildung ist im Raum sehr viel vielfältiger als in der Ebene. Jeder Knoten besitzt **sechs Freiheitsgrade**, und zwar:

$$u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$$

Zur Darstellung eines **Auflagers** ist es nicht mehr sinnvoll, ein entsprechendes Symbol einzuführen. Am besten zeigt man an, welcher Freiheitsgrad gesperrt ist und welcher nicht. Das nebenstehende Bild zeigt eine Volleinspannung. Jeder Freiheitsgrad ist gesperrt. Die Verschiebungsfreiheitsgrade werden mit einem einfachen Strich in Richtung der (meist) globalen Achse gekennzeichnet, die Verdrehungsfreiheitsgrade mit einem Doppelstrich.



Bei der Behandlung ebener Probleme wurde mit der Strichelung an der positiven Faser das lokale Koordinatensystem, speziell die Richtung der positiven x-Achse definiert. Im räumlichen Fall versagt diese Darstellung. Hier muss für jeden Stab ein **eigenes lokales Koordinatensystem** festgelegt werden.



Hinweis: Die Betrachtung eines räumlichen Problems stellt eine viel höhere Anforderung an das Anschauungsvermögen, als dies bei ebenen Problemen der Fall ist.

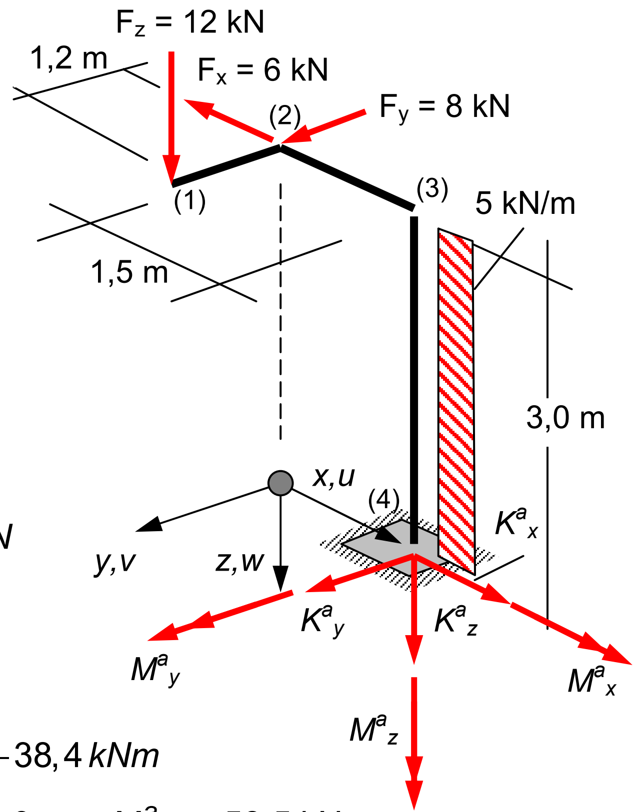
Wichtig ist, dass man sich ganz „stur“ an Regeln hält. Anschauung ist gut; formales Vorgehen besser (vor allem sicherer).

<u>Zum Beispiel:</u> Die positive Definition der Auflagerreaktionen orientiert sich strikt nach der Ausrichtung des globalen Koordinatensystems (eine positive Auflagerkraft zeigt in Richtung der positiven Achse; ein positives Einspannmoment dreht immer im Uhrzeigersinn um die zugehörige Achse)

Hinweis: Einzellasten und Auflagerreaktionen sollten vorzugsweise im globalen System beschrieben werden; Streckenlasten vorzugsweise im lokalen, stabbezogenen System.

8.2 Schnittgrößenermittlung im Raum

Ein mehrfach abgewinkelte (90°) Kragstütze hat eine Streckenlast und mehrere Einzellasten aufzunehmen. Es sind alle Schnittgrößenverläufe zu ermitteln.



Auflagerreaktionen: Am Knoten 4 befindet sich ein 6-wertiges Auflager. Die sechs Auflagerreaktionen werden mit Hilfe der sechs Gleichgewichtsbedingungen im Raum berechnet. Die Vorzeichendefinition der Auflagerreaktionen richtet sich nach dem globalen Koordinatensystem.

$$\Sigma \overline{K}_x = 0 : +K_x^a - 6{,}0 - 5{,}0 \cdot 3{,}0 = 0 \quad \rightarrow K_x^a = +21{,}0\,kN$$

$$\Sigma \overline{K}_y = 0 : +K_y^a + 8{,}0 = 0 \quad \rightarrow K_y^a = -8{,}0\,kN$$

$$\Sigma \overline{K}_z = 0 : +K_z^a + 12{,}0 = 0 \quad \rightarrow K_z^a = -12{,}0\,kN$$

$$\Sigma \overline{M}_{x,4} = 0 : +M_x^a + 12{,}0 \cdot 1{,}2 + 8{,}0 \cdot 3{,}0 = 0 \quad \rightarrow M_x^a = -38{,}4\,kNm$$

$$\Sigma \overline{M}_{y,4} = 0 : +M_y^a + 12{,}0 \cdot 1{,}5 + 6{,}0 \cdot 3{,}0 + 5{,}0 \cdot 3{,}0 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \rightarrow M_y^a = -58{,}5\,kNm$$

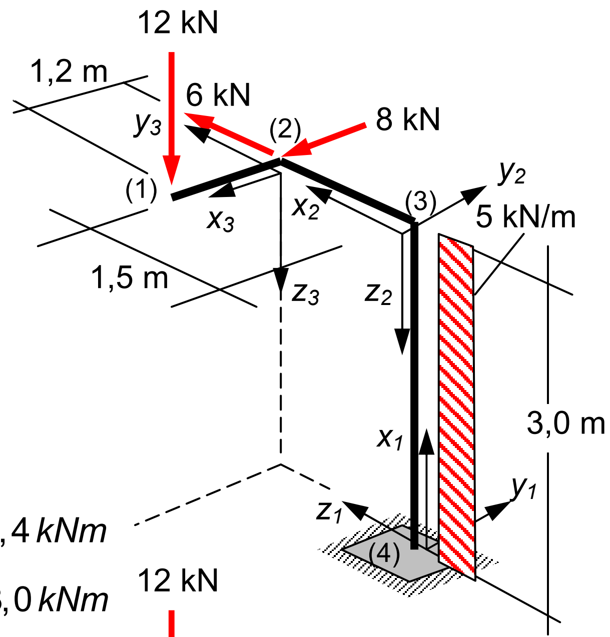
$$\Sigma \overline{M}_{z,4} = 0 : +M_z^a - 6{,}0 \cdot 0{,}0 - 8{,}0 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \rightarrow M_z^a = +12{,}0\,kNm$$

Schnittgrößen: Bevor überhaupt irgendwelche Schnittgrößen berechnet oder dargestellt werden, müssen die lokalen Koord.-systeme festgelegt werden. Die lokale x-Achse zeigt vom Anfangsknoten in Richtung des Endknotens. Die übrigen Achsen können beliebig festgelegt werden. Für horizontal verlaufende Stäbe ist es i.d.R. sinnvoll, die lokale z-Koordinate in die vertikale Richtung, meist also in die globale z-Richtung zeigen zu lassen. Ebenso sinnvoll ist es, die lokalen Systeme dem Stabverlauf folgend festzulegen; also von 4 nach 3, von 3 nach 2 und von 2 nach 1. Bei verzweigten Systemen sollte man gedanklich dem „Verlauf“ des Wasserflusses in einem verzweigten Gartenschlauch folgen.

Hinweis: Am Knoten 2 und am Knoten 3 sind 90°-Winkel vorhanden. Die perspektivische Darstellung erfordert ein Mitdenken des Betrachters.

Hinweis: Bei der Aufstellung der Momentengleichgewichtsbedingungen ist immer ein Knotenpunkt festzulegen, um den die Momente betrachtet werden sollen (hier bietet sich Knoten 4 an).

Die gewählten lokalen Koord.-systeme sind im nebenstehenden Bild dargestellt. Durch die Definition der lokalen Systeme wird festlegt, welches Schnittufer positiv und welches negativ ist. Im Nachfolgenden sollen die Schnittgrößen am Knoten 3 in Richtung 2 berechnet werden.



$$\Sigma K_x = 0: -N_{3-2} + 6{,}0 = 0 \quad \rightarrow N_{3-2} = +6{,}0\,kN$$

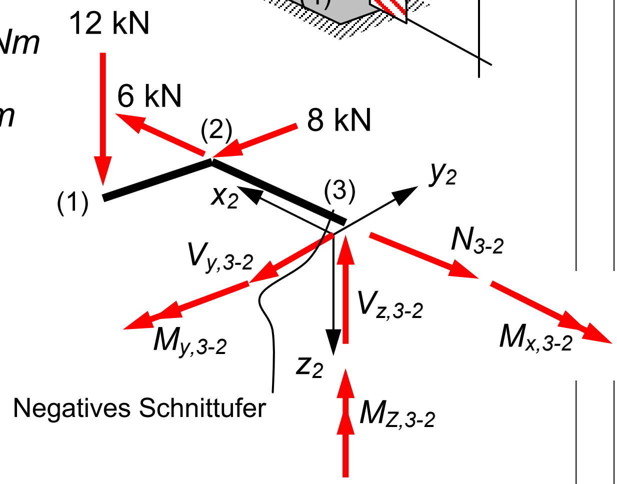
$$\Sigma K_y = 0: -V_{y,3-2} - 8{,}0 = 0 \quad \rightarrow V_{y,3-2} = -8{,}0\,kN$$

$$\Sigma K_z = 0: -V_{z,3-2} + 12{,}0 = 0 \quad \rightarrow V_{z,3-2} = +12{,}0\,kN$$

$$\Sigma M_{x,3} = 0: -M_{x,3-2} - 12{,}0 \cdot 1{,}2 = 0 \quad \rightarrow M_{x,3-2} = -14{,}4\,kNm$$

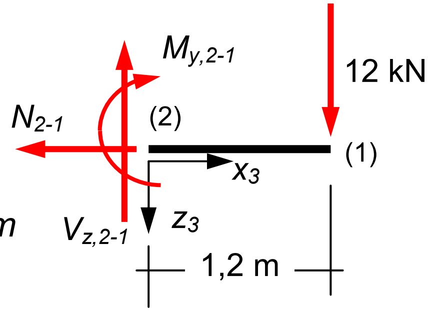
$$\Sigma M_{y,3} = 0: -M_{y,3-2} - 12{,}0 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \rightarrow M_{y,3-2} = -18{,}0\,kNm$$

$$\Sigma M_{z,3} = 0: -M_{z,3-2} - 8{,}0 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \rightarrow M_{z,3-2} = -12{,}0\,kNm$$



Alle weiteren Schnittgrößen sollen anschaulich ermittelt werden. Im Raum stellt dies eine gewisse Herausforderung dar. Eine Hilfestellung gibt die Projektion des (Teil-)Systems auf die x-z-Ebene oder x-y-Ebene. Systemteile oder Lasten, die vor oder hinter der betrachteten Ebene liegen, werden wie in einer Projektion mit in der Ebene dargestellt.

<u>Beispiel:</u> Es sollen anschaulich die Schnittgrößen am Knoten 2 in Richtung 1 bestimmt werden. Die Darstellung des Teilsystems in der lokalen x-z-Ebene kann ohne weiteres ausgewertet werden:



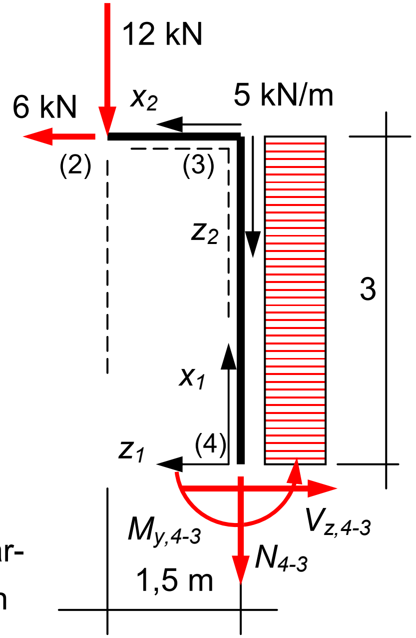
$$N_{2-1} = 0\,kN; \quad V_{z,2-1} = 12{,}0\,kN; \quad M_{y,2-1} = -12{,}0 \cdot 1{,}2 = -14{,}4\,kNm$$

Hinweis: Am positiven Schnittufer zeigen die positiven Schnittgrößen in Richtung der lokalen Koordinatenachsen. Am negativen Schnittufer – so wie in diesem Beispiel – zeigen die Kraftpfeile und Momentendoppelpfeile in entgegen gesetzte Richtungen.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Schnittgrößen am Knoten 2 in Richtung 1 und am Knoten 4 in Richtung 3. Stellen Sie die freigeschnittenen Teilsysteme mit den unbekannten Schnittgrößen am Schnittufer dar.

<u>Noch ein Beispiel</u>: Durch die Projektion auf die globale x-z-Ebene entsteht die nebenstehende Darstellung. Die Schnittgrößen an der Einspannung im Knoten 4 lassen sich einfach (meist durch genaues Hinsehen) ermitteln:

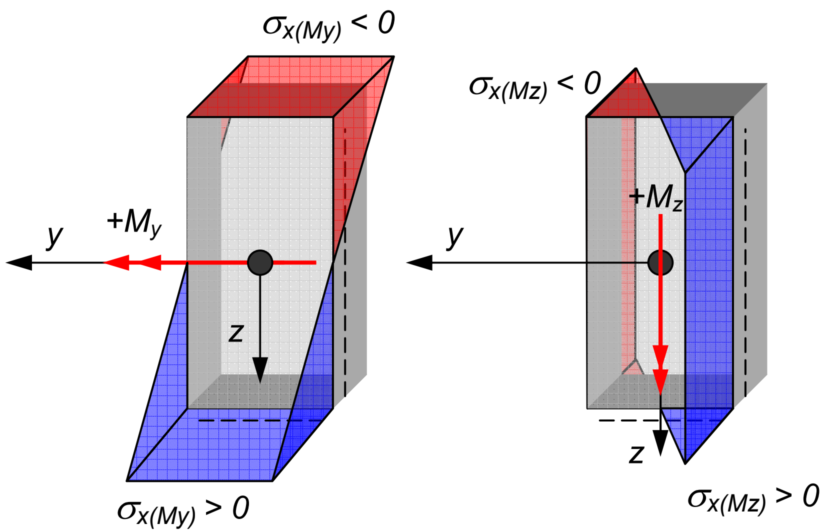
$$N_{4-3} = -12\,kN; \quad V_{z,4-3} = 6{,}0 + 5{,}0 \cdot 3{,}0 = +21{,}0\,kN;$$
$$M_{y,4-3} = -6{,}0 \cdot 3{,}0 - 12{,}0 \cdot 1{,}5 - 5{,}0 \cdot 3{,}0 \cdot 1{,}5 = -58{,}5\,kNm$$



<u>Zurück zu den Schnittgrößenverläufen:</u> Diese können jetzt an die Systemlinien angetragen werden. Schnittgröße sind stabbezogene Größen und werden senkrecht zur Stabachse aufgetragen. Die Schnittgrößen N, V_z und M_y werden (wie gewohnt) in der lokalen x-z-Ebene dargestellt; die Schnittgrößen V_y und M_z logischerweise dann in der lokalen x-y-Ebene ebenso wie die (neue) Schnittgröße $M_x = M_T$. Bezüglich des Vorzeichens der Schnittgrößen V_y und M_z ist ein **Vorzeichenwechsel** zu beachten.

<u>Warum?</u> Ein positives M_y erzeugt in den Querschnittsteilen mit z > 0 positive Spannungen. Bei ebenen Systemen bedient man sich der positiven Faser ($z_{Pos.\ Faser} = z_{max} > 0$).

Dagegen erzeugt ein positives M_z in den Querschnittsteilen mit y > 0 negative Spannungen. Die positive Faser würde also bei $y = y_{min} < 0$ liegen.



Wirken N, M_y und M_z, so werden die Längsspannungen deshalb mit

$$\sigma_x = \sigma_{x,N} + \sigma_{x,M_y} + \sigma_{x,M_z} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

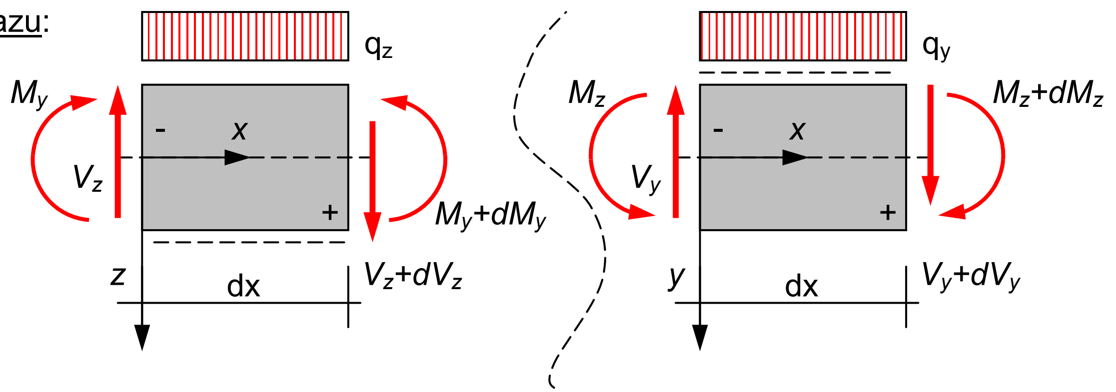
berechnet (bitte das negative Vorzeichen von M_z beachten).

Aufgabe: Beim nebenstehenden Bild schauen wir in Richtung der lokalen y_1- und y_2-Achse. Drehen Sie diese Skizze gedanklich so hin, dass die lok. z_1-Achse nach unten und die lokale x_1-Achse nach rechts zeigt. Stellen Sie auch die freigeschnittenen Schnittgrößen am Knoten 4 dar. Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um ein negatives Schnittufer handelt.

Schaut man sich ein infinitesimal kleines Stabelement an, so fällt bei der Querbiegung (= Biegebeanspruchung um die z-Achse) wieder ein **negatives** Vorzeichen auf. Es gilt:

$$M'_y = +V_z \quad und \quad V'_z = -q_z \quad \underline{aber} \quad M'_z = -V_y \quad und \quad V'_y = -q_y$$

<u>Kleine Betrachtung dazu</u>:



Für „Hauptbiegung“:

$$\Sigma K_z = 0 : -V_z + V_z + dV_z + q_z \cdot dx = 0 \quad \rightarrow \frac{dV_z}{dx} = V'_z = -q_z$$

$$\Sigma M_y = 0 : -M_y + M_y + dM_y - V_z \cdot dx - \underset{0}{\cancel{q_z \cdot dx \cdot dx / 2}} = 0 \quad \rightarrow \frac{dM_y}{dx} = M'_y = +V_z$$

Für „Querbiegung“:

$$\Sigma K_y = 0 : -V_y + V_y + dV_y + q_y \cdot dx = 0 \quad \rightarrow \frac{dV_y}{dx} = V'_y = -q_y$$

$$\Sigma M_z = 0 : -M_z + M_z + dM_z + V_y \cdot dx - \underset{0}{\cancel{q_y \cdot dx \cdot dx / 2}} = 0 \quad \rightarrow \frac{dM_z}{dx} = M'_z = -V_y$$

<u>Konsequenz:</u> Eine positive Querkraft V_y und ein positives Biegemoment M_z werden an der Querschnittkante mit negativen y abgetragen. Der Querkraftverlauf von V_y springt den Lasten nicht entgegen, sondern lässt sich durch diese in ihre Richtung „treiben“.

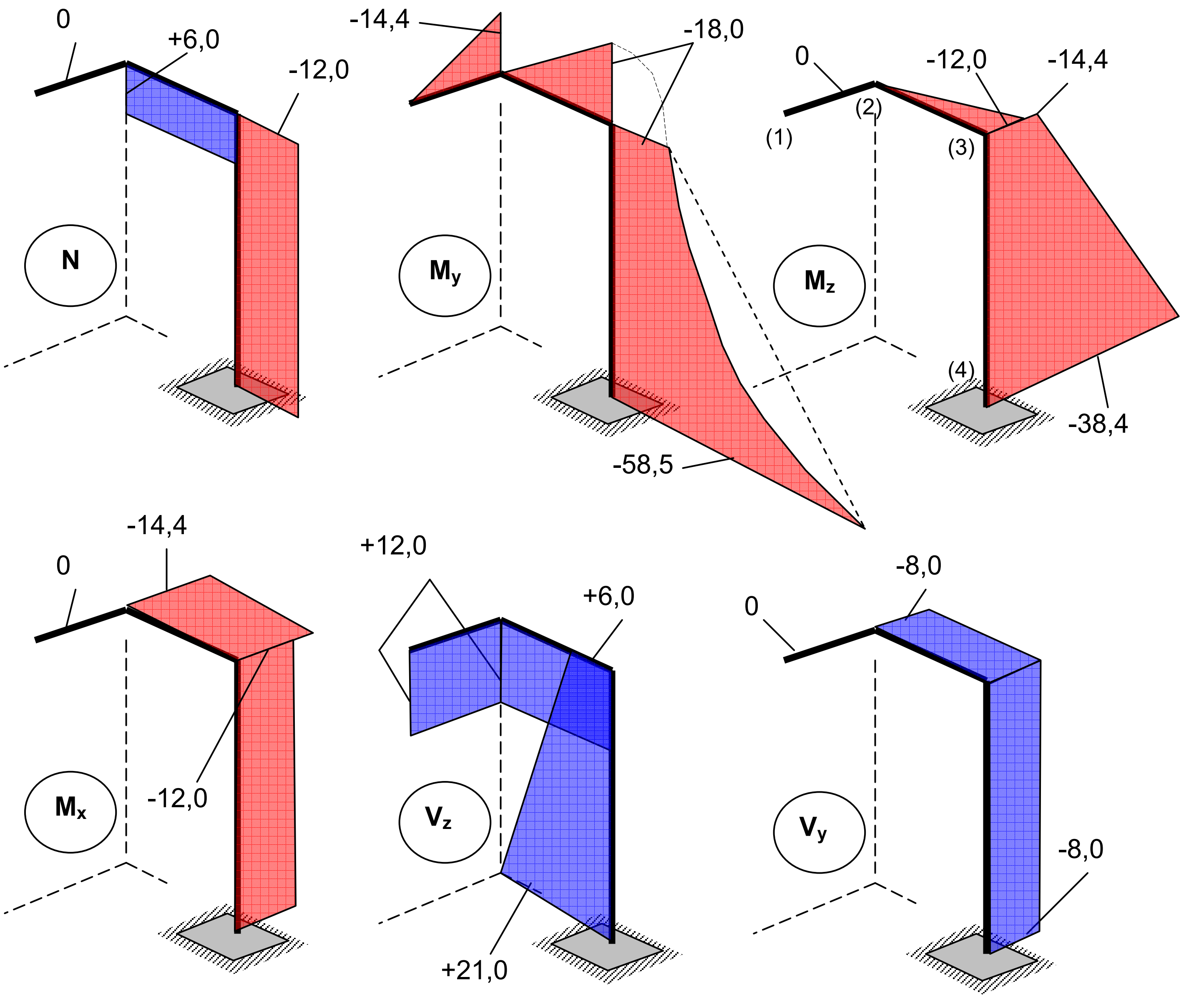
Jetzt also die Darstellung der Schnittgrößenverläufe:

Hinweis:

Bei Biegung um die y-Achse: Die Steigung des Momentenverlaufs entspricht der Querkraft.

Bei Biegung um die z-Achse: Die Steigung des Momentenverlaufs entspricht der Querkraft mit umgekehrtem Vorzeichen.

Für den Querkraftverlauf gilt in beiden Fällen: Die Steigung des Querkraftverlaufes entspricht der Streckenlast mit umgekehrtem Vorzeichen.



Zur Erinnerung:

Stabzug: (4) – (3); (3) – (2), (2) – (1)

Hinweis: Bei Biegung um die y-Achse: Die Steigung des Momentenverlaufs entspricht der Querkraft.

Bei Biegung um die z-Achse: Die Steigung des Momentesverlaufs entspricht der Querkraft mit umgekehrtem Vorzeichen.

Das Biegemoment M_y =-14,4 kNm vor Knoten 2 wird als Torsionsmoment bis Knoten 3 weitergeleitet und hier als M_z in den lotrechten Stab eingeleitet.

Das Biegemoment M_z =-12,0 kNm vor Knoten 3 wird als Torsionsmoment bis Knoten 4 weitergeleitet.

Aufgabe: Sind alle Regeln beachtet und die Ergebnisse richtig? Notfalls mit RSTAB (3-D) überprüfen.